素数定理的初等证明

潘承洞，潘承彪

上海科技出版社

目　　录

第一章

素数定理的历史

本章主要介绍素数定理证明的发展史，并同时介绍本书的内容安排(见§2). 在§1及§3中分别介绍本书中常用的符号 O 和 $\ll$, 以及数论函数 $[x]$.

§1 符号O及≪

本书中经常要使用符号 O(读作“大欧”)及 $\ll$(读作“小于小于”), 前者是 E. Landau 引进的, 后者是 И. М. Виноградов 引进的. 它们的意义是相同的, 但在使用中各有优点.

定义1 设 $\mathscr{M}$ 是给定的一个实数集合，$f(x)$ 是定义在 $\mathscr{M}$ 上的复值函数，$\phi(x)$ 是定义在 $\mathscr{M}$ 上的正值函数. 如果存在一个与变数 x 无关的常数 A, 使得

(1) $$|f(x)| \leqslant A\phi(x), \quad x \in \mathscr{M},$$

那末就记作

(2) $$f(x)=O(\phi(x)) \quad 或 \quad f=O(\phi), \quad x \in \mathscr{M},$$

或

(3) $$f(x) \ll \phi(x) \quad 或 \quad f \ll \phi, \ x \in \mathscr{M},$$

常数 A 称为符号 O(或 $\ll$)所包含的常数，简称 O(或 $\ll$)常数.

显然，这两个符号是不等式的缩写. 当 $\phi(x)\equiv 1$ 时，这两个符号表明 $|f(x)|$ 在集合 $\mathscr{M}$ 上有界. 一般说来，这表明

了 $|f(x)|$ 在集合 $\mathscr{M}$ 上的数量阶不超过 $\phi(x)$ 的数量阶. 例如:

(4) $$\sin(ax+b)=O(1),\quad \sin(ax+b)\ll 1,\quad -\infty<x<+\infty.$$

(5) $$\sin x=O(|x|),\ \sin x\ll|x|,\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

(6) $$1-\cos x=O(x^2),\ 1-\cos x\ll x^2,\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

设 $b\geqslant a>0$, 则有

(7) $$x^a=O(x^b),\quad x^a\ll x^b,\quad x\geqslant 1.$$

(8) $$x^b=O(x^a),\quad x^b\ll x^a,\quad 0\leqslant x<1.$$

(9) $$\frac{x}{(x-1)^2}=O(|x|),\ \frac{x}{(x-1)^2}\ll|x|,\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

(10) $$\frac{x}{(x-1)^2}=O\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right),\ \frac{x}{(x-1)^2}\ll\frac{1}{(x-1)^2},\quad |x-1|\leqslant\frac{1}{2},\ x\neq 1.$$

(11) $$\frac{x}{(x-1)^2}=O\left(\frac{1}{|x|}\right),\ \frac{x}{(x-1)^2}\ll\frac{1}{|x|},\quad |x-1|\geqslant\frac{1}{2}.$$

最后三个例子表明,同一个函数在不同的集合上(实际上是在不同的点附近: $x=0$, $x=1$, $x=\infty$)、它的数量阶是不同的.所以, 可以说这两个符号是用来刻划函数在一个点的邻近的变化的数量阶的(包括有界、无界、无穷小、无穷大).

对任意固定的正数 δ, 有

(12) $$x=O(x^2),\quad |x|\geqslant\delta,$$

因为可取 $A=1/\delta$. 但是

(13) $$x=O(x^2),\quad |x|\leqslant 1,$$

不成立，这是因为在 $x=0$ 处，x^2 是二阶无穷小，而 x 只是一阶无穷小．这例子也表明常数 A 和所考虑的定义域 $\mathscr{M}$ 是有关的．

有时候函数 $f(x)$ 可依赖于某一参数 λ（或几个参数），这时常数 A 可能依赖于参数 λ，也可能不依赖于参数 λ．有时这一点必须明确指出．例如：式(4)中的例子，函数依赖于两个参数 a 和 b，但常数 A 可取作 1 而与参数无关．但若考虑 $\sin ax$，$-\infty<a<\infty$，我们有

$$\sin ax=O(|x|),\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}, \tag{14}$$

这时可取 $A=|a|$，但不能取 A 为某一常数．这时，我们就说式(14)中的 O 常数与参数 a 有关．但若取 $\phi(x)=|ax|$，则

$$\sin ax=O(|ax|)$$

中的 O 常数就与参数 a 无关．

符号 O 和 $\ll$ 有两个简单有用的运算法则．设

$$f_1(x)=O(\phi_1(x)),\ f_1(x)\ll\phi_1(x),\ x\in\mathscr{M}, \tag{15}$$

及

$$f_2(x)=O(\phi_2(x)),\ f_2(x)\ll\phi_2(x),\ x\in\mathscr{M}, \tag{16}$$

则有

$$f_1(x)+f_2(x)=O(\phi_1(x)+\phi_2(x)),\ x\in\mathscr{M}, \tag{17}$$

$$f_1(x)+f_2(x)\ll\phi_1(x)+\phi_2(x),\ x\in\mathscr{M}, \tag{17$'$}$$

及

$$f_1(x)f_2(x)=O(\phi_1(x)\phi_2(x)),\ x\in\mathscr{M}, \tag{18}$$

$$f_1(x)f_2(x)\ll\phi_1(x)\phi_2(x),\ x\in\mathscr{M}. \tag{18$'$}$$

以上证明留给读者．在作这些运算时，不难发现符号“$\ll$”用起来要比符号“O”方便，因为这类似于不等式的运算法则．下面举例说明其应用．

由式(5)、(6)和(8)，利用法则(17)′，可得

$$(19)\quad e^{ix}-1 = (\cos x-1)+i\sin x \ll |x|^2+|x| \ll |x|+|x| \ll |x|,\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

由式(7)，利用法则(17)′，可得

$$(20)\quad \begin{aligned} &a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\ &\ll |x|^n+|x|^{n-1}+\cdots+|x|+1\\ &\ll |x|^n+|x|^n+\cdots+|x|^n=n|x|^n \ll |x|^n,\\ &\qquad |x|\geqslant 1.\end{aligned}$$

这里的 $\ll$ 常数和系数 $a_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 及次数 n 有关.

由式(20)可得

$$|x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0| \geqslant |x|^m-A|x|^{m-1},\quad |x|\geqslant 1,$$

其中常数 A 和系数 b_i 及次数 m 有关. 所以当 $|x|$ 充分大时，即 $|x|\geqslant x_0=x_0(A)$ 时，有

$$|x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0| \geqslant \frac{1}{2}|x|^m,\quad |x|\geqslant x_0.$$

这样就证明了

$$(21)\quad (x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0)^{-1} \ll |x|^{-m},\quad |x|\geqslant x_0.$$

由式(20)及(21)，利用法则(18)′，即得

$$(22)\quad \frac{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0} \ll |x|^{n-m},\ |x|\geqslant x_0.$$

这里我们可以取 x_0 和这两个多项式的系数和次数有关，而 $\ll$ 常数和这些参数无关.（为什么？）

在数论中，我们往往并不需要知道一个函数的精确性状，而只要知道它的数量阶是否不超过某一简单函数的数量阶.

因此，以上例子表明符号 O 及 $\ll$ 在数论中是十分有用的.

符号 O 的一个优点是：我们可单独用 $O(\phi(x))$ 来代表某一个不需要(或不可能)明确指出的函数 $f(x)$，它满足 $f(x)=O(\phi(x))$. 这一点用符号 $\ll$ 是不适宜的. 关于这种用法，我们将在以后用到时指出.

最后，我们举几个与素数定理的误差项估计有关的例子.

由不等式

$$x\leqslant e^x \quad (x\geqslant 0),$$

可得

$$(23) \qquad x^c\leqslant\left(\frac{1}{a}\right)^c e^{acx}, \quad x\geqslant 0,\ a>0,\ c\geqslant 0.$$

所以，对任意实数 $c>0$, $\delta>0$，有

$$(24) \qquad x^c=O(e^{\delta x}), \qquad x\geqslant 0.$$

这里可取 $A=(c/\delta)^c$. 令 $x=\ln y$，可得

$$(25) \qquad (\ln y)^c=O(y^\delta), \qquad y\geqslant 1.$$

在式(24)中令 $x=(\ln y)^\lambda$, $0<\lambda<1$，则有

$$(26) \qquad (\ln y)^{c\lambda}=O(e^{\delta(\ln y)^\lambda}), \qquad y\geqslant 1.$$

即对任意正数 $b>0$, $\delta>0$, $0<\lambda<1$，有

$$(27) \qquad (\ln y)^b=O(e^{\delta(\ln y)^\lambda}), \qquad y\geqslant 1,$$

其中 O 常数和 b, δ, λ 有关.

此外，容易证明(留给读者)：对任意的 $M>0$, $0<\lambda<1$ 及 $\delta>0$，有

$$(28) \qquad e^{M(\ln y)^\lambda}=O(y^\delta), \qquad y\geqslant 1.$$

本书中还将用到分析中的两个常用符号：o(读作"小欧")及 $\sim$(读作"等价于"). 它们是用来比较无穷小及无穷大的阶(或级)的. 关于它们的定义和用法在所有数学分析教科书中均能找到，例如可参看【数】第二章 § 8，或【微】第 60～65 款.

§2 素数定理的历史

素数的基本性质 一个大于 1 的整数，除了 1 和它本身以外不能被其它正整数整除，就称为素数，也叫做质数。通常用字母 p, q 等表示. 例如，2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …都是素数. 设 $x\geqslant 1$，我们以 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数. 不难算出

(1)
$$\pi(x)=0 \quad (x<2),$$
$$\pi(5)=3,\ \pi(10)=4,\ \pi(50)=15.$$

素数的最重要最基本的性质就是刻划正整数和素数之间关系的算术基本定理*)（见第二章 §2 的引理 1）：每个大于 1 的整数 a 可以唯一的表为

(2)
$$a=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_r^{\alpha_r},$$

其中 q_i 为素数，$q_1<q_2<\cdots<q_r$；整数 $\alpha_i>0$.

利用算术基本定理，L. Euler 证明了一个著名的恒等式：对实数 $s>1$，有

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

其中 $\prod\limits_p$ 表展布在全体素数上的乘积（见第三章 §4 引理 1）. 这一恒等式实质上是算术基本定理的一个解析等价形式. 通过它把我们所不了解的素数和我们极其熟悉的自然数以非常明确的解析形式联系起来了.

对素数分布状况的研究是数论的一个重要组成部份. 它的一个中心问题就是研究函数 $\pi(x)$ 的性质. 还有一个著名问题，就是所谓“孪生素数猜想”：存在无穷多个素数 p，使得

---

*) Euclid 的《几何原本》第九篇中的命题 14 即是这一定理.

$p+2$ 亦为素数，这一猜想至今尚未解决．

Euclid 的名著«几何原本»第九篇的命题 20 证明了：素数的数目比任何指定的数目都要多，即素数有无穷多个(见第二章 § 1 的定理 1)：

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) = +\infty. \tag{4}$$

这样，把全体素数按大小排列就得到一个无穷叙列

$$2=p_1<p_2<p_3<\cdots<p_n<\cdots. \tag{5}$$

后来发现在全体正整数中素数仅占很少一部份．这就是 Euler 和 A. M. Legendre 提出和证明的下面的结果(见第二章 § 3 定理 1)：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x}=0. \tag{6}$$

什么是素数定理　大家知道，利用古老的 Eratosthenes 筛法，我们可以对很大的 x 求出所有不超过 x 的素数，因而也求出了 $\pi(x)$ 的值．但是，人们始终得不到一个表示 $\pi(x)$ 的明确的公式或渐近公式．为此，编制了许多素数表*)，希望从这些经验数据中能得到一些启示，发现某种规律．

1800 年左右，根据数值计算 Legendre 提出了一个令人惊奇的精确的渐近公式：

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x - 1.08366} \quad (x\to+\infty). \tag{7}$$

1849 年，F. Gauss 在给 Encke 的一封信中说：他在 1792 至 1793 年间通过考察在以一千个相邻整数为一段中的素数个数，发现对于大的值 x 素数的"平均分布密度"应是 $1/\ln x$，因而提出：

---

*) 一本很好的素数表是 D. H. Lehmer 编制的 List of Prime Numbers from 1 to 10,000,671, Carnegie Inst. Publ. 165, Washington, 1914.

$$(8) \qquad \pi(x) \sim \mathrm{Li}\, x \quad (x \to +\infty),$$

其中

$$(9) \qquad \mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{du}{\ln u},$$

称为对数积分(见第三章§1(23)式和(24)式). 有时以

$$(10) \qquad \mathrm{li}\, x = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x\right)\frac{du}{\ln u}$$

来代替 $\mathrm{Li}\, x$. 两者仅差一常数 $\mathrm{li}\, 2 = 1.04\cdots$. 容易证明: 对任意实数 a, 有

$$(11) \qquad \frac{x}{\ln x + a} \sim \frac{x}{\ln x} \sim \mathrm{Li}\, x \quad (x \to +\infty),$$

所以渐近公式 (7) 和 (8) 基本上是一样的. 不过以后将看到 Gauss 的猜测更为深刻(见后面的(30)至(33)式). 我们把命题

$$(12) \qquad \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to +\infty),$$

或式 (8) 称为素数定理. 有时这也叫做不带余项估计的素数定理.

令

$$(13) \qquad R(x) = \pi(x) - \mathrm{Li}\, x.$$

素数定理就是要证明

$$(14) \qquad R(x) = o\left(\frac{x}{\ln x}\right), \quad (x \to +\infty).$$

如果对 $R(x)$的阶作出更精确的估计, 就称为带余项估计的素数定理.

从下面表 1[*] 所列出的数据, 可清楚地看出素数定理的合理性, 以及 Gauss 的猜测更为精确.

---

[*] 表中的 $\frac{x}{\ln x}$ 及 $\mathrm{li}\, x$ 的值均为取整的近似值. 它们和 $\pi(x)$ 的比值亦为近似值.

表 1

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\operatorname{li} x$	$\frac{\pi(x)\ln x}{x}$	$\frac{\pi(x)}{\operatorname{li} x}$
1000	168	145	178	1.16	0.94
10000	1229	1086	1246	1.13	0.98
50000	5133	4621	5167	1.11	0.993
100000	9592	8686	9630	1.10	0.996
500000	41538	38103	41606	1.090	0.998
1000000	78498	72382	78628	1.084	0.998
2000000	148933	137848	149055	1.080	0.9991
5000000	348513	324149	348638	1.075	0.9996
10000000	664579	620417	664918	1.071	0.9994

Чебышев的贡献 首先对素数定理的研究作出了极为重要贡献的是 П. Л. Чебышев. 在 1852 年左右，他证明了存在两个正常数 C_1 与 C_2，使不等式(见第二章 § 4 定理 1)

$$C_1 \frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant C_2 \frac{x}{\ln x} \quad (x \geqslant 2) \tag{15}$$

成立，并相当精确的定出了 C_1 与 C_2 的数值. 这称为 Чебышев 不等式. 他还证明了(参见第三章 § 3 定理 1)

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} \leqslant 1 \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}. \tag{16}$$

由此就可推出(见第三章 § 3 推论 2)：极限

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

若存在，则必为 1. 这也就是说，如果当 $x \to +\infty$ 时，$\pi(x)$有渐近公式，则必为(12)式.

Чебышев 的重要贡献还在于他为了研究素数定理而引进了两个重要的函数

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p, \tag{17}$$

(18) $$\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n),$$
其中 $\Lambda(n)$是 Mangoldt 函数：

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & n=p^l,\ l\geqslant 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

这两个函数称为 Чебышев 函数. 这两个函数和 $\pi(x)$之间有十分密切的关系(见第二章§5 定理 1 及第三章§1 定理 2)，他证明了素数定理(12)等价于命题

(19) $$\theta(x)\sim x \quad (x\to+\infty),$$

或

(20) $$\psi(x)\sim x \quad (x\to+\infty).$$

而对余项 $R(x)$的研究可转化为对余项

(21) $$R_1(x)=\theta(x)-x,$$

或

(22) $$R_2(x)=\psi(x)-x$$

的研究.

引进这两个函数，特别是引进 $\psi(x)$的好处在于：由算术基本定理可推出 $\psi(x)$的下述重要性质(见第二章§7 定理 1)：

(23) $$\sum_{n\leq x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leq x}\ln n.$$

这样，把一个性状很不清楚的函数 $\psi(x)$和我们十分熟悉的对数函数之间建立了一个十分简单的联系. 这个关系式的重要性可从下面的事实看出：从它可以证明 Чебышев 不等式(15)，下面的 Mertens 的素数分布公式(24)、(25)、(26)以及 Selberg 不等式(39). 因此，素数定理的 Selberg-Erdös 的初等证明(见第五章)的基础也是这一关系式.

在 Чебышев 工作的基础上，1874 年左右 F. Mertens 证

明了有关素数平均分布的三个重要结果(见第三章§2定理1、定理2、定理3及§5定理1):

$$\sum_{n<x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1), \tag{24}$$

$$\sum_{p<x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + A_1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{25}$$

$$\prod_{p<x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln x} + O\left(\frac{1}{(\ln x)^2}\right). \tag{26}$$

以上介绍了在素数定理证明之前,关于素数分布方面取得的主要成果,为证明素数定理奠定了必要的数论方面的基础(参看 Landau[1, §§1, 2, 4, 6, 7, 12~28]).本书第二、三章就是讨论这些结果.

为了证明素数定理,除了命题(19)及(20)外,还得到了其它许多与它等价的命题,这些命题本身也是十分重要和有趣的.这样,素数定理也就转化为证明这些命题,这也是素数定理有如此之多的证明的原因.第四章及第九章§5介绍了几个重要的等价命题(参看 Landau[1, 第2卷], Ayoub[1, 第2章]).

Riemann 的贡献 1859年, B. Riemann 发表了题为"论不超过一个给定值的素数个数"的著名论文([1]).这也是他唯一的一篇研究数论的论文.他把 Euler 恒等式(3)作为研究的出发点,把这恒等式左边的级数记作 $\zeta(s)$——这就是现在所说的 Riemann ζ 函数.一个重要的不同是:他把 s 看作为复变数, Euler 恒等式对复变数 s 当 $\text{Re}\, s>1$ 时也成立(见第八章§1定理2).他对复变函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}\, s > 1, \tag{27}$$

作了深刻系统的研究,证明(有的是不严格的)了许多重要结

果，特别是得到了一个与$\zeta(s)$的零点有关的表示素数个数$\pi(x)$的公式. 他的研究表明：研究素数分布的关键在于进一步探讨复变函数$\zeta(s)$，特别是它的零点的性质 Riemann 的那些证明不严的结果后来由 J. Hadamard 和 H. von Mangoldt 给出了严格的证明. $\zeta(s)$的一些基本性质有：它可以解析开拓到全平面，仅在$s=1$有一个一级极点，留数为1；它有无穷多个实部$\geqslant 0$的零点，且这些零点都是位于长条$0\leqslant \mathrm{Re}\, s\leqslant 1$中的复零点；$-2, -4, -6, \cdots, -2n, \cdots$是它仅有的实部$<0$的零点，且均为一级零点. Riemann 猜测所有实部$\geqslant 0$的零点都在直线$\mathrm{Re}\, s=\dfrac{1}{2}$上，这就是至今未解决的著名的 Riemann 猜想(以上内容参见华罗庚[3]§17, §18).

我们将要证明(见第八章§1(17)式)

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},\quad \mathrm{Re}\, s>1. \tag{28}$$

由于 Чебышев 对其所引进的函数$\psi(x)$的研究，从上式也可清楚看出有可能利用函数$\zeta(s)$来研究素数定理.

Hadamard 和 de la Vallée Poussin 的贡献 正是沿着 Riemann 指出的方向，利用高深的整函数理论，在 1896 年 Hadamard([1])和 de la Vallée Poussin([1])几乎同时独立证明了素数定理(12). 证明的关键之点是证明了：

$$\zeta(1+it)\neq 0,\quad -\infty<t<+\infty. \tag{29}$$

后来，de la Vallée Poussin ([2])于 1900 年证明了带余项的素数定理：

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\, x+O(x\exp(-C_3\sqrt{\ln x})), \tag{30}$$

或等价地有

$$\psi(x)=x+O(x\exp(-C_4\sqrt{\ln x})), \tag{31}$$

其中 C_3、C_4 为两个常数.

Landau([4])不用整函数理论，但仍用较高深的单复变函数论知识，给出了(30)式(或(31)式)的一个新证明. 在此之前，Littlewood([1])宣布利用估计 Weyl 指数和*)的方法可把式(30)改进为

$$(32) \qquad \pi(x)=\operatorname{Li}x+O(x\exp(-C_5\sqrt{\ln x\ln\ln x})).$$

利用 Landau 的方法及 И. М. Виноградов 估计 Weyl 指数和的方法，不断改进了素数定理的余项估计(见 Чудаков: [1], [2], [3]; Titchmarsh: [1]; 华罗庚: [1]; И. М. Виноградов: [1]; 华罗庚和吴方: [1]; Карацуба: [1, 第六章]; Walfisz: [1])，目前最好的结果是

$$(33) \qquad \pi(x)=\operatorname{Li}x+O(x\exp(C_6\ln^{\frac{3}{5}}x(\ln\ln x)^{-\frac{1}{5}})).$$

最后，应该指出：在 Riemann 猜想成立的假定下，von Koch ([1])早在 1901 年证明了

$$(34) \qquad \pi(x)=\operatorname{Li}x+O(x^{\frac{1}{2}}\ln x).$$

而另一方面，Littlewood ([2])于 1914 年证明了：存在一个正常数 C_7，使得有无穷多个 x，使

$$(35) \qquad \pi(x)-\operatorname{li}x>C_7(x^{\frac{1}{2}}\ln\ln\ln x)/\ln x$$

以及存在无穷多个 x，使

$$(36) \qquad \pi(x)-\operatorname{li}x<-C_7(x^{\frac{1}{2}}\ln\ln\ln x)/\ln x.$$

这表明素数定理的误差项的变化是十分不规则的，它的阶估计是不会低于 $x^{\frac{1}{2}}/\ln x$ 的，这一问题的研究至今尚未解决.

以上结果都是用高深的方法得到的，不属于初等证明的范围，我们仅作简略的介绍，本书也不讨论这些方法和结果.

---

*) 关于 Weyl 指数和参看华罗庚: [3]第二章.

初等的复变函数论的证明 自从 Hadamard 和 de la Vallée Poussin 证明了素数定理之后，人们一直在寻求一个较为简单的证明. 这方面有 Landau ([1] § 66, [2], [3]), Hardy–Littlewood ([2], [3]) 等人的工作. 这种类型的证明要用到的知识是: 复变函数论的 Cauchy 积分定理; 把 $\zeta(s)$ 解析开拓到 $\mathrm{Re}\, s>0$; $\zeta(1+it)\neq 0$; $\zeta(s)$在半平面 $\mathrm{Re}\, s\geqslant 1$ 上的有关阶估计; 以及某种类型的 Tauber 型定理(为了建立素数定理的等价命题，而这种命题较易证明). 本书第十一、十二章就给出了两个这种类型的证明. 第八章讨论了所需要的 ζ 函数的性质，第九章的 § 1 及 § 2 给出了相应的 Tauber 型定理. 应该指出的是: 用到的 ζ 函数的阶估计的结果愈弱，则需要的 Tauber 型定理就愈强.

直到最近用这种方法仅能证明不带余项的素数定理. 1981 年，Čižek([1])利用第十一章的证明方法，结合熟知的 Fourier 变换的性质(见第十一章 § 3)，很容易的证明了如下形式的带余项估计的素数定理:

对任意正数 $A>1$，有

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\, x+O(x(\ln x)^{-A}) \tag{37}$$

(见第十一章 § 5 定理 1). 这一定理最初是由 Wirsing([1], [2])和 Bombieri([1], [2])用很复杂的初等方法得到的.

Wiener 的贡献 以上的证明都需要用到 Cauchy 积分定理和较多的 $\zeta(s)$ 的性质. Wiener([1], [2]) 首先利用他的一般形式的 Tauber 型定理(见第十四章 § 1 定理 2)，不用 Cauchy 定理，以及仅需要性质 $\zeta(1+it)\neq 0$ (不需要任何阶的估计)，证明了素数定理. 由于他的工作使人们看到素数定理实质上等价于

$$\zeta(1+it)\neq 0, \tag{38}$$

(必要性的证明见第十章§2定理1). 由于这里不需要 Cauchy 定理, 所以实质上是给出了一个实分析的证明. 应该指出, 这里用到了实变函数论和 L 空间中的 Fourier 变换(见第十三章)等很深刻的实分析知识.

他的证明后来为 Ikehara([1])、Bochner([1])、Landau([5])和 Ingham([1])等人所简化和改进. 本书将给出 Ikehara 的证明(见第九章§4定理1及第十章)以及 Ingham 的证明(见第十四章§2定理1). 利用 Ikehara 的方法, Čižek([1])也证明了形如(37)的素数定理.

十分有趣的是 Gerig([1])仅利用 $\zeta(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,s>1$ 内的性质及简单的调和分析结果, 证明了对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O\left(x(\ln x)^{-\frac{5}{4}+\varepsilon}\right).$$

Selberg-Erdös 的贡献 素数定理的证明一定要用到 ζ 函数以及较深的分析工具, 这一观点由于 Wiener 的工作, 更使人深信不疑了. 因为, 既然素数定理实质上等价于一个复变函数 $\zeta(s)$ 的性质(38), 而且证明又都是那样不简单, 所以从理论的逻辑结构上来说, 要去寻找一个不用 ζ 函数, 不用分析工具(或只用很少的微积分)的初等证明, 看来十有八九是不可能的. 这种观点为很多数学家所接受. 早在1921年, 著名数学家 G. H. Hardy 在哥本哈根数学会发表的演讲中有一段话集中反映了这种看法. 我们把这段话的原文摘录如下:

"No elementary proof of the prime number theorem is known, and one may ask whether it is reasonable to expect one. Now we know that the theorem is roughly equivalent to a theorem about an analytic function, the

theorem that Riemann's zeta function has no roots on a certain line. A proof of such a theorem, not fundamentally dependent upon the ideas of the theory of functions, seems to me extraordinarily unlikely. It is rash to assert that a mathematical theorem *cannot* be proved in a particular way; but one thing seems quite clear. We have certain views about the logic of the theory; we think that some theorems, as we say 'lie deep' and others nearer to the surface. If anyone produces an elementary proof of the prime number theorem, he will show that these views are wrong, that the subject does not hang together in the way we have supposed, and that it is time for the books to be cast aside and for the theory to be rewritten."

Hardy 于 1947 年去世了．可是就在两年之后，年轻的数学家 Selberg([1])和 Erdös([1])就给出了这样的证明！他们的证明竟是这样的初等：除了需要 e^x，$\ln x$ 等超越函数的简单性质外(1)，不需要任何微分与积分的知识．当然，他们的证明是十分复杂的．看来，一个困难的问题，不管用什么方法解决，其解法总是困难的．他们的证明途径虽有不同，但证明的基础都是 Selberg 的著名不等式(也称恒等式)：

$$(39)\qquad \sum_{p<x}\ln^2 p+\sum_{pq<x}\ln p\ln q=2x\ln x+O(x),$$

其中 p, q 是素变数．容易证明它等价于

(1) Fogel ([1]) 用 $E(x)=1+x/1!+x^2/2!+\cdots+x^N/N!$ 代替 e^x，用 $\sum\limits_{n<x}\frac{1}{n}$ 代替 $\ln x$，用完全初等的方法证明了 $\pi(x)\sim x\Big(\sum\limits_{n<x}\frac{1}{n}\Big)^{-1}$．Eda([1]) 简化了他的证明．

$$(40)\qquad \psi(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)=2x\ln x+O(x)$$

(见第五章§2(4)式).

由于他们的杰出贡献，Selberg 获得了 1950 年的 Fields 国际数学奖，Erdös 获得了 1951 年美国的 F. N. Cole 代数和数论奖.

A. E. Ingham 对他们的文章作了长篇评论(见 Math. Reviews, 10(1949), 595～596). 他在列出了素数定理的解析证明的四个关键性质——有关 ζ 函数的四个性质——后指出：Selberg 和 Erdös 所做的贡献就是找到了这些关键步骤的算术等价形式，并直接由这些算术结果用初等方法推出了素数定理. 例如，容易证明 Selberg 不等式(39)就是 ζ 函数的恒等式

$$(41)\qquad \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)'+\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)^2=\frac{\zeta''(s)}{\zeta}$$

所刻划的性质的算术等价形式(这种等价情形在数学中，特别是在数论中，是经常出现的).

许多数学家进一步简化了他们的证明. 在这些证明中，用了一点初等微积分，使得定理证明的思想更清楚，形式更简洁. 例如，Wright([1])，R. Breusch([1])，Постников 和 Романов([1])*)，Nevalinna([1]，[2])，Levinson([1]，[2])，Kalecki([1]，[2])等. 关于 Selberg 不等式的最简单的证明是由 Tatuzawa 和 Iseki([1])给出的(见第五章§2 定理 2). 从这证明可看出 Selberg 不等式是 Чебышев 的恒等式(23)的一个简单推论. 因而，素数定理的基础实质上亦是关系式(23).

*) Постников([1])对该文作了一点更正.

本书的第五章根据 Levinson 的文章 [2] 给出了这样的一个简化证明.

建立在 Selberg 不等式的基础上，仅利用初等微积分知识的这种初等证明，也可用来得到素数定理的余项估计. Wright([2])证明了

(42) $$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O(x(\ln x)^{-1}(\ln\ln x)^{-\frac{1}{2}}).$$

Erdös 曾经证明了(见 Selberg[2])：存在一个常数 $C>1$，使得

(43) $$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O(x(\ln x)^{-C}).$$

van der Corput([1])证明了 $C=\frac{201}{200}$; Breusch ([2])证明了 $C=\frac{7}{6}-\varepsilon$ (ε 为任意小的正数); Wirsing ([1])证明了 $C=\frac{7}{4}$ *); A. Дусумбетов ([1])证明了 $C=2-\varepsilon$ (ε 为任意小的正数); Balog([1])证明了

(44) $$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O(x(\ln x)^{-\frac{5}{4}}(\ln\ln x)).$$

本书的第六章给出了 Breusch([2])的证明.

还应该指出，Bombieri([1], [2]) 推广了 Selberg 不等式，证明了式(43)对任意的 $C>1$ 均成立. 他的证明思路原则上类似于 Selberg 的证明，但是极其复杂，需要利用 Amitsur([1])关于 Dirichlet 卷积和广义卷积的理论以及许多深刻的实变函数论知识. Wirsing([2]) 对这一结果给出了不同的初等证明. Diamond 和 Steinig([1]) 利用卷积和以测度代替算术函数，通过推广 Selberg 不等式和类似于 Wirsing 的讨论，在其长达 70 页的文章中证明了

---

*) 这一证明利用了一个巧妙的几何引理.

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O(x\exp(-C(\ln x)^{\frac{1}{7}}(\ln\ln x)^{-2}),$$

这是目前不用复变理论所得到的最好结果．本书第八章对 Bombieri 的证明作了简单介绍，其目的在于讨论数论中十分重要的卷积运算以及证明一般的 Selberg 不等式．

综上所述，素数定理的证明大致可分为四类：(1) 要利用高深的复变函数论知识和其他工具以及 $\zeta(s)$ 的许多深刻的性质．这种方法得到了目前最好的余项估计．(2) 复变函数论的知识仅用到 Cauchy 积分定理，ζ 函数的性质仅用到 $\zeta(1+it)\neq 0$ 及在半平面 $\mathrm{Re}\,s\geqslant 1$ 上的阶估计，以及较简单的 Tauber 型定理．(3) 不用 Cauchy 定理，ζ 函数的性质仅要用 $\zeta(1+it)\neq 0$．但要用到深刻的 Tauber 型定理，因而需要包括 Fourier 变换在内的许多深刻的实分析知识．(4) 不利用 ζ 函数，建立在 Selberg 不等式(39)的基础上，仅用实分析知识的证明*)．第 (1) 类证明当然在任何意义上都不是初等的，真正的"初等"证明应该是第(4)类．通常把第(3)类证明(即不用 Cauchy 定理）亦看作是"初等"的．我们将看到"初等"并不意味着"简单"，一些"初等"的证明实际上要比一些较"高等"的证明更为复杂．因此，我们把第 (2)，(3)，(4) 类证明都认为是初等的．本书中挑选有代表性的七种这样的初等证明加以介绍．

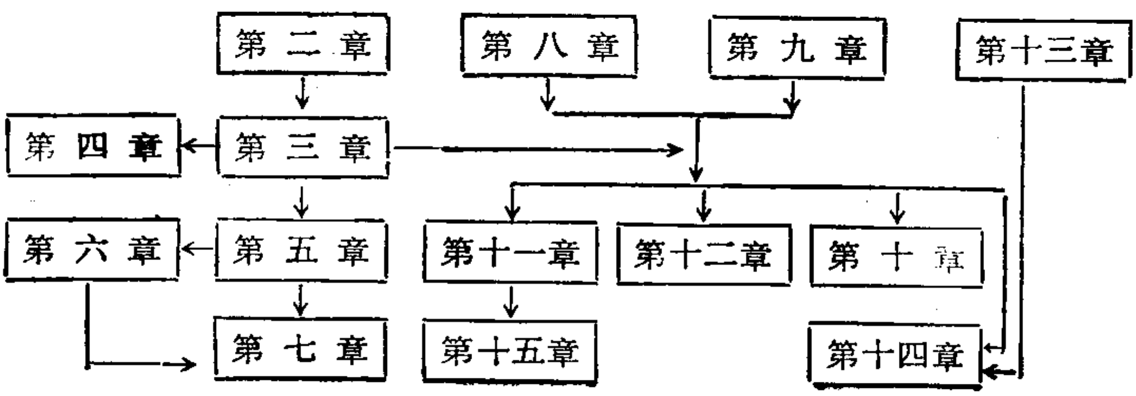
当读完本书第五章所给出的素数定理的第一个初等证明时，可能会觉得它并不太困难．因而，对于这样一个事实会感到奇怪：为什么素数定理先是利用高深的整函数理论给出其证明，而在长达 53 年之后才找到了这样一个初等证明．这一方面可能是由于早就知道的 Euler 恒等式(2)及 Чебышев 函

*) 这种证明实质上亦是某种 Tauber 型定理．

数 $\psi(x)$ 使得素数定理很容易和 ζ 函数建立联系；而在 19 世纪，复变函数论得到了迅速的发展．所以人们就很有信心地沿着 Riemann 指出的这一很自然的途径进行研究，并达到了目的．而在另一方面，要发现巧妙的有用的初等关系，往往需要天才的机智，而比发现高深的关系要困难得多(高深的东西往往是有很自然的合乎逻辑的发展，所以容易发现)．这一点我们可能从解平面几何的习题与代数和分析的习题的对比中有所体会．当然，素数定理本身确实是一个十分困难的问题，因为对素数本身的了解除了其定义和算术基本定理(见式(1))外，几乎是一无所知．大概是由于这些原因，使得素数定理的初等证明是如此难以发现．正由于此，Selberg-Erdös 的工作在数论中占有重要的地位．

从探讨素数定理证明的发展历史中，可以看到，数论是如何推动了其他数学分支的发展，以及其他数学分支是如何被应用于解决数论问题的．因此学习素数定理的各种有代表性的证明，对于提高我们在数学上观察、分析、解决问题的能力是很有益的．这也为我们想要进一步研究素数定理和其他有关问题打下一个基础．这就是我们写这本书的目的．对于仅想了解 Selberg-Erdös 的初等证明的读者，可以只读本书的第二、三、五章．

本书各章间的逻辑关系大致如下：



§3 数论函数$[x]$

定义 1 $[x]$ 是定义在全体实数 x 上的函数，它的值等于不超过 x 的最大整数. 它通常称为 x 的整数部份，也叫作最大整数函数. 此外，记

$$\{x\}=x-[x], \tag{1}$$

称为 x 的小数部份.

例如，

$$[3.2]=3, \quad \{3.2\}=0.2,$$
$$[4]=4, \quad \{4\}=0,$$
$$[-1.2]=-2, \quad \{-1.2\}=0.8.$$

容易证明以下的性质:

性质 1 $[x]\leqslant x<[x]+1,\ 0\leqslant\{x\}<1.$

性质 2 若 $x\geqslant 1$，则 $[x]=\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant x}1$，即 $[x]$ 等于不超 x 的正整数的个数.

性质 3 若 m 是整数，则 $[x+m]=[x]+m.$

性质 4 $[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1.$

性质 5 若 m 是正整数，则 $[[x]/m]=[x/m].$

性质 6 设 d 是正整数，x 是正数. 那末，不超过 x 且被 d 整除的正整数个数为 $[x/d]$.

证 性质 1、2 直接由定义推出. 由式(1)知

$$[x+m]=[[x]+m+\{x\}]=[x]+m.$$

最后一步由定义推出，这就证明了性质 3. 由式(1)及性质 3 知

$$\begin{aligned}[x+y]&=[[x]+[y]+\{x\}+\{y\}]\\&=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}].\end{aligned}$$

而由性质 1 知

$$0\leqslant\{x\}+\{y\}<2,$$

由以上两式及定义即得性质 4. 由式(1)及性质 3 得

$$(2)\quad \left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{[x]}{m}+\frac{\{x\}}{m}\right]=\left[\left[\frac{[x]}{m}\right]+\left\{\frac{[x]}{m}\right\}+\frac{\{x\}}{m}\right]$$
$$=\left[\frac{[x]}{m}\right]+\left[\left\{\frac{[x]}{m}\right\}+\frac{\{x\}}{m}\right].$$

当m为正整数时，由带余数除法得

$$[x]=qm+r,\ 0\leqslant r\leqslant m-1,$$

所以
$$\left\{\frac{[x]}{m}\right\}=\frac{r}{m}\leqslant\frac{m-1}{m},$$

因此，由性质 1 得

$$\left\{\frac{[x]}{m}\right\}+\frac{\{x\}}{m}<1,$$

由此及式 (2) 就证明了性质 5. 最后证明性质 6. 设个数为 M，则必满足 $Md\leqslant x<(M+1)d$，即

$$M\leqslant\frac{x}{d}<M+1.$$

由此从定义就推出 $M=[x/d]$. ∎

这些性质以后经常要用，到时不再一一指出了. 以下的性质作为习题留给读者：

性质 7

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0, & x\text{ 是整数;}\\ -1, & \text{其它.}\end{cases}$$

性质 8 $-[-x]$是不小于 x 的最小整数.

性质 9 $\left[x+\frac{1}{2}\right]$是距 x 最近的整数. 当有两个整数与 x 等距时，它是较大的一个.

性质 10 $-\left[-x+\frac{1}{2}\right]$是距 x 最近的整数. 当有两个整

数与 x 等距时，它是较小的一个.

第一章习题

1. 证明§1中的(17)式和(18)式.

2. 设 k 是正整数，证明 $\{O(f)\}^k=O(f^k)$，右边的 O 常数和 k 有关.

3. 证明当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，有：(a) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+O(|x|^5)$；(b) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+O(|x|^4)$；(c) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(|x|^3)$；(d) $(1+x)^a=1+ax+O(x^2)$，a 为实数；(e) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+O(|x|^{n+1})$.

4. 设 a 为正数，$x\geqslant 1$. 试证明 $\int_1^x(\ln t)^a dt=O(x\ln^a x)$.

5. 设 a 为正数，$x\geqslant 2$. 试证明 $\int_2^x(\ln t)^{-a}dt=O(x(\ln x)^{-a})$.

6. 试证明§2中的(11)式.

7. 设 $c>0$，$x\geqslant 1$. 试证明对任意正数 $\varepsilon<1$，有
$$\int_1^x e^{-c\sqrt{\ln t}}dt\ll xe^{-c(1-\varepsilon)\sqrt{\ln x}},$$
其中 $\ll$ 常数和 ε 有关.

8. 证明 $\left(x+1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x=ex^x+O(x^{x-1})$，$x\geqslant 1$.

9. 设 $b_n>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散. 再设 $a_n=o(b_n)$，$n\to\infty$. 试证明
$$\sum_{n=1}^{N}a_n=o\left(\sum_{n=1}^{N}b_n\right)\quad(N\to\infty).$$

10. 设 $g(x)>0$，$x\geqslant a$，积分 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散. 再设 $f(x)=o(g(x))$，$x\to+\infty$. 证明
$$\int_a^x f(t)dt=o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right),\quad x\to+\infty.$$

11. 设 $b_n>0$，当 $0\leqslant x<1$ 时，幂级数 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 收敛，但 $g(x)\to+\infty$，$x\to 1-$. 再设 $a_n=o(b_n)$，$n\to\infty$，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 证明

$f(x)=o(g(x)),\ x\to 1_-$.

12. 若把上题中的条件 $a_n=o(b_n)$ 改为 $a_n\sim b_n(n\to\infty)$，则有 $f(x)\sim g(x),\ x\to 1_-$.

13. 设幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 当 $0\leqslant x<1$ 时均收敛. 再设 $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\ t_n=\sum_{k=0}^{n}b_k$，且 $t_n>0,\quad s_n=o(t_n)\ (n\to\infty)$ 以及 $\sum_{n=0}^{\infty}t_nx^n\to+\infty(x\to 1_-)$. 试证明 $f(x)=o(g(x))(x\to 1_-)$.

$\left[\right.$提示：当 $0\leqslant x<1$ 时，有 $f(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n,\quad g(x)=(1-x)\times\sum_{n=0}^{\infty}t_nx^n.$ $\left.\right]$

14. 若把上题中的条件 $s_n=o(t_n)$ 改为 $s_n\sim t_n(n\to\infty)$，则有 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to 1_-)$.

15. 设 $a_n\sim\ln n\ (n\to+\infty)$. 试证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\sim\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}\quad(x\to 1_-).$$

[提示：利用上题].

16. 证明§3中的性质7～10. 并画出函数 $[x]$ 和 $\{x\}$ 的图形.

17. 分别求出满足以下关系式的实数 x：

(a) $[x]+[x]=[2x]$；　　(b) $[x+3]=3+[x]$；

(c) $[x+3]=3+x$；　　(d) $\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x-\frac{1}{2}\right]=[2x]$；

(e) $[9x]=9$.

18. 设 $[x+y]=[x]+[y]$ 和 $[-x-y]=[-x]+[-y]$ 成立，试证明 x,y 中必有一个是整数.

19. 证明 $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$.

20. 证明 $[x-y]\leqslant[x]-[y]\leqslant[x-y]+1$.

21. 证明对任意实数 α,β，必有 $[2\alpha]+[2\beta]\geqslant[\alpha]+[\beta]+[\alpha+\beta]$，但不一定有 $[3\alpha]+[3\beta]\geqslant[\alpha]+[\beta]+[2\alpha+2\beta]$.

22. 以 $\|x\|$ 记实数 x 到离它最近的整数的距离，试证明：

(a) 当 $\{x\}\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\|x\|=\{x\}$；

(b) 当 $\{x\}\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$\|x\|=1-\{x\}$;

(c) 对所有的 x, $\|x\|\leqslant\frac{1}{2}$.

23. 试证明:

(a) 对任意整数 n, 有 $\|x+n\|=\|x\|$;

(b) 当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\|x\|=|x|$;

(c) $\|-x\|=\|x\|$;

(d) 对正整数 k, 有 $\|kx\|=\|k\|x\|\|$;

(e) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$;

(f) $\|x-y\|\geqslant\|x\|-\|y\|$;

(g) 对正整数 k, 有 $\|kx\|\leqslant k\|x\|$, 等号仅当 $k\|x\|\leqslant\frac{1}{2}$ 时成立.

此外，画出函数 $\|x\|$ 的图形.

第 二 章

ЧЕБЫШЕВ 不 等 式

§1 素数有无穷多个

定理 1 素数有无穷多个.

这一著名的定理有许多证明，下面将给出四个有代表性的证明. 最早的证明见于 Euclid 的《几何原本》第九篇命题 20，它是基于下面的引理.

引理 1 设整数 $a>1$，它的大于 1 的最小正除数 d 必为素数.

证 若 d 不是素数，则由素数定义知，必有整数 d'，使得 $1<d'<d$，$d'|d$. 因而 $d'|a$，但这和 d 的假设矛盾. ∎

由此推出：若 a 不是素数，则必有

$$d\leqslant\sqrt{a}. \tag{1}$$

定理 1 的第一个证明 用反证法：假定素数只有有限个，它们是

$$2=p_1<p_2<\cdots<p_s.$$

设 $n=p_1p_2\cdots p_s+1$，d 是它的大于 1 的最小正除数. 由引理 2 知 d 是素数. 因为 $p_i\nmid n(i=1,\cdots,s)$，所以 $d\neq p_i(i=1,\cdots,s)$. 这和假设矛盾. ∎

把全体素数按大小顺序排列，就得到一个无限数列，我们记为

$$2=p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_s,\ p_{s+1},\ \cdots. \tag{2}$$

由定理 1 的第一个证明知，

(3) $$p_{s+1}\leqslant p_1p_2\cdots p_s+1.$$

由此得到

推论 1 我们有

(4) $$p_s\leqslant 2^{2^{s-1}}\quad (s=1,\ 2,\ \cdots)$$

及

(5) $$\pi(x)\geqslant \log_2\log_2 x\quad (x\geqslant 2).$$

证 $s=1$ 时，$p_1=2$，式(4)显然成立. 设 $s\geqslant 2$，如果式(4)对 $<s$ 均成立，则由式(3)得

$$p_s\leqslant p_1\cdots p_{s-1}+1\leqslant 2^{2^0}\cdots 2^{2^{s-2}}+1<2^{2^{s-1}},$$

所以式(4)对 s 亦成立，故由归纳法知，式(4)对所有自然数 s 均成立.

对任一 $x\geqslant 2$，必有唯一的自然数 s，使得

$$2^{2^{s-1}}\leqslant x<2^{2^s},$$

由此及式(4)得

$$\pi(x)\geqslant \pi(2^{2^{s-1}})\geqslant s>\log_2\log_2 x.$$

这就证明了式(5). ∎

第二个证明是基于：

引理 2 设有一个无限正整数列

(6) $$1<u_1<u_2<\cdots<u_s<\cdots,$$

如果它的任意两项均互素，则一定有无限多个素数.

证 设 d_s 是 u_s 的大于 1 的最小正除数，由此得到一个无限数列

$$d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_s,\ \cdots.$$

由假设知，它们一定也是两两互素的，所以是不同的整数. 而由引理 1 知 d_s 均为素数. 这就证明了引理. ∎

这样一来，定理 1 就归结为去寻找具有这样性质的数

列(6).

定理 1 的第二个证明 著名的 Fermat 数列

(7) $$F_n=2^{2^n}+1 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

就是满足引理 4 中的条件的数列. 显然有

$$1<F_0<F_1<\cdots<F_n<\cdots.$$

下面证明它们两两互素. 设 $n\geqslant 0$, $k\geqslant 1$. 由

$$F_{n+k}-2=(2^{2^n})^{2^k}-1$$

知 $F_n|F_{n+k}-2$. 设 $d=(F_n,\ F_{n+k})$, 因而必有 $d|2$. F_n 均为奇数, 所以 $d=1$. ▌

第三个证明需要

引理 3 设整数 $a>1$, 则 a 一定可以表为

(8) $$a=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_r^{\alpha_r},$$

其中 q_i 均为素数, 且 $q_1<q_2<\cdots<q_r$, 以及整数 $\alpha_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant r)$.

证 当 $a=2$ 时, 引理显然成立. 设 $n\geqslant 3$, 假设引理对所有的 a $(2\leqslant a<n)$ 均成立. 当 n 为素数时, 则引理对于 $a=n$ 显然也成立; 当 n 不是素数时, 设 d 是 n 的大于 1 的最小正除数, $n=dn_1$. 由引理 1 知 d 为素数. 此外, 这时必有 $2\leqslant n_1<n$, 故由假设知 n_1 可表为式(8)的形式, 所以 n 亦可表为这样的形式. 由归纳法知引理成立. ▌

注意 这里并没有要求表示式(8)是唯一的, 在下一节将证明这一点——这就是著名的算术基本定理(见§2 引理 1).

推论 2 任一正整数 a 一定可以表为

(9) $$a=k^2l,$$

其中 $l=1$, 或是不同的素数的乘积, k 是正整数.

这是引理 3 的直接推论. 此外, 容易证明: 如果表示式(8)是唯一的, 则表示式(9)也是唯一的.

定理 1 的第三个证明 设 $n\geqslant 2$. 对任意一个 a $(1\leqslant a\leqslant n)$,在它的表示式(9)中一定有: $1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}$, $l=1$ 或 l 是一些不超过 n 的不同的素数的乘积. 这样, k 可能取的值的个数 $\leqslant\sqrt{n}$,而 l 所可能取的值的个数不超过以下的组合数之和*)

$$1+\binom{\pi(n)}{1}+\binom{\pi(n)}{2}+\cdots+\binom{\pi(n)}{\pi(n)}=2^{\pi(n)}.$$

所以必有

$$n\leqslant\sqrt{n}\,2^{\pi(n)},$$

即

$$\pi(n)\geqslant\frac{1}{2}\log_2 n \quad (n\geqslant 2). \tag{10}$$

这就证明了定理 1, 而且同时给出了一个比估计式(5)稍好一些的下界估计. ▌

若在式(10)中取 $n=p_s$, 即得

$$p_s\leqslant 2^{2s} \quad (s=1,\ 2,\ \cdots). \tag{11}$$

它比 p_s 的上界估计式(4)亦要好一些.

最后一个证明是 Euler 给出的. 它需要

引理 4 设 $x\geqslant 2$, 我们有

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant x}\frac{1}{a}\leqslant\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}, \tag{12}$$

其中求和号展布在所有不超过 x 的正整数上, 连乘号展布在所有不超过 x 的素数上.

证 设 $2^k\leqslant x<2^{k+1}$. 显然有

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)$$
$$\geqslant\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^k}\right).$$

---

*) 不超过 n 的素数有 $\pi(n)$ 个, 所有的 k 个不超过 n 的不同的素数的乘积个数为 $\binom{\pi(n)}{k}$ 由此即得所说的结论.

1 显然出现在上式右边的乘积中．当 $2\leqslant a\leqslant x$ 时，由于 a 可表为形式(8)，且一定有 $q_i^{\alpha_i}\leqslant a\leqslant x \quad (1\leqslant i\leqslant r)$，所以

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{q_1^{\alpha_1}}\frac{1}{q_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{1}{q_r^{\alpha_r}}$$

亦一定出现于上式右边的乘积中．注意到对于不同的 a 它们的表示式(8)一定是不同的，这就证明了式(12)．▌

定理 1 的第四个证明 如果只有有限个素数，那么式(12)的右边当 $x\to+\infty$ 时为一有限数．但是左边的调和级数当 $x\to+\infty$ 时是发散的，这一矛盾就证明了定理．▌

事实上，由引理 7 可得到更多的信息．

推论 3 设 $x\geqslant e$，我们有

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\geqslant\frac{1}{2}\ln\ln x, \tag{13}$$

$$\pi(x)\geqslant\ln\ln x, \tag{14}$$

及

$$p_s\leqslant e^{e^s} \quad (s=1,\ 2,\ \cdots). \tag{15}$$

证 熟知当 $y>-1$ 时，有

$$y\geqslant\ln(1+y).$$

因而有

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant x}\frac{1}{a}\geqslant\sum_{1\leqslant a\leqslant x}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) \tag{16}$$

$$=\ln([x]+1)>\ln x,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，显有 $x-1<[x]\leqslant x$．此外，当 $u\geqslant 2$ 时，有

$$\ln\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-1}=\ln\left(1+\frac{1}{u}\frac{u}{u-1}\right)$$

$$\leqslant\ln\left(1+\frac{2}{u}\right)\leqslant\frac{2}{u}.$$

对式(12)两边取对数，由以上两式即得式(13)．由式(13)及

$p\geqslant 2$ 即得式(14). 在式(14)中取 $x=p_s$ 即得式(15). ▌

应该指出，这四个证明都需要引理1——这是正整数和素数之间关系的最基本的性质.

§2 算术基本定理

为了证明几乎所有的自然数都不是素数和以后的需要，我们要先证明初等数论中的最重要的定理——算术基本定理：

引理1 对每一个整数 $a>1$，它的表示式§1(8)是唯一的. §1(8)式称为 a 的素因子分解式.

证 用反证法: 先把§1(8)式改写为

$$a=q_1q_2\cdots q_s,\ q_1\leqslant q_2\leqslant\cdots\leqslant q_s \tag{1}$$

(这里的 q_i 和§1(8)式中的不同). 设 a_0 是使引理不成立的最小正整数. 这样，当 $1<a<a_0$ 时，a 的表示式(1)是唯一的，而 a_0 至少有两个不同的表示式，设为

$$a_0=q_1q_2\cdots q_s=q_1'q_2'\cdots q_t'. \tag{2}$$

由素数的定义知，当 a 为素数时引理必成立，所以必有 $s>1$，$t>1$. 进而由 a_0 的最小性可推出：

$$q_i\neq q_j'\quad (i=1,\ \cdots,\ s;\ j=1,\ \cdots,\ t).$$

如若不然，设 $q_{i_0}=q_{j_0}'$，则 a_0/q_{i_0} 也有两个不同的表示式. 不妨假定 $q_1'<q_1$，设

$$a_1=(q_1-q_1')q_2\cdots q_s.$$

由式(2)知 $$a_1=q_1'(q_2'\cdots q_t'-q_2\cdots q_s).$$

由于 $q_1'\nmid(q_1-q_1')$(若 $q_1'|(q_1-q_1')$，则 $q_1'|q_1$，但 q_1，q_1' 均为素数，且 $q_1'<q_1$，这是不可能的)及 $q_1'<q_i(i=2,\cdots,s)$，从以上两式就可得到 a_1 的两个不同的表示式. 而由 a_1 的定义知(注

意：$s>1$），$1<a_1<a_0$，这和 a_0 的最小性矛盾．】

由引理1立即可以推出初等数论中的另一重要结论．即：

引理2 设 p 是素数，$p|a_1a_2$，则 $p|a_1$ 和 $p|a_2$ 至少有一个成立．一般的，若 $p|a_1a_2\cdots a_s$，则至少有一个 $i(1\leqslant i\leqslant s)$，使得 $p|a_i$ 成立．

证 用反证法：当 $a_1=1$ 或 $a_2=1$ 时，引理显然成立，故可设 $a_1>1$，$a_2>1$．这时一定有 $p<a_1a_2$．若 $p\nmid a_1$，$p\nmid a_2$，则 a_1 和 a_2 的素因子分解式中一定都没有素数 p．把这两个分解式相乘就得到了 a_1a_2 的素因子分解式（把素因子加以适当的排列），它不包含 p．但另一方面，$a_1a_2/p>1$，所以从 a_1a_2/p 的素因子分解式就可得到 a_1a_2 的一个包含 p 的素因子分解式．这样，a_1a_2 就有两个不同的分解式，这同引理1矛盾，这就证明了引理的第一部份．】至于一般情形的证明，留给读者．

值得指出的是：引理1和引理2是等价的．不少初等数论书上都是先证明引理2，然后推出引理1．

如果允许指数为零，那末任意两个正整数 a 和 b，总可以写为具有相同的素因子的方幂的乘积，即

$$(3)\qquad \begin{aligned} a&=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_s^{\alpha_s}, \quad \alpha_i\geqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant s,\\ b&=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_s^{\beta_s}, \quad \beta_i\geqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant s,\end{aligned}$$

其中素数 $q_1<q_2<\cdots<q_s$．这样的写法有时是方便的．由引理2可证明

推论1 设正整数 a 和 b 由式(3)给出，则 $a|b$ 的充要条件是 $\alpha_i\leqslant\beta_i$ $(1\leqslant i\leqslant s)$．

证 充分性是显然的．下证必要性：我们先证明 $\alpha_1\leqslant\beta_1$，其它可同样证明．当 $\alpha_1=0$ 时，显然成立．设整数 $k\geqslant 1$．假设当 $0\leqslant\alpha_1<k$ 时，不等式 $\alpha_1\leqslant\beta_1$ 均成立．当 $\alpha_1=k$ 时，一定有 $q_1|a$，所以 $q_1|b$．由引理2知，当 $2\leqslant i\leqslant s$ 时，$q_1\nmid q_i^{\beta_i}$，进而

仍由引理2可推出必有 $q_1|q_1^{\beta_1}$. 因此 $\beta_1\geqslant1$. 现设

$$a_1=\frac{a}{q_1}=q_1^{\alpha_1-1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_s^{\alpha_s},$$

$$b_1=\frac{b}{q_1}=q_1^{\beta_1-1}q_2^{\beta_2}\cdots q_s^{\beta_s}.$$

显有 $a_1|b_1$, 由假设知有 $\alpha_1-1\leqslant\beta_1-1$, 即 $\alpha_1\leqslant\beta_1$. 这样, 由归纳法就证明了必要性.]

由推论1可证明

推论2 设正整数 a 和 b 由(3)式给出. 那么 (i) a 和 b 的最大公约数

$$(a,\ b)=q_1^{u_1}q_2^{u_2}\cdots q_s^{u_s}, \tag{4}$$

其中 $u_i=\min(\alpha_i,\ \beta_i)$ $(1\leqslant i\leqslant s)$. 特别地, a 和 b 互素的充要条件是 $u_i=0$ $(1\leqslant i\leqslant s)$. 此外, 若 $d|a,\ d|b$, 则 $d|(a,\ b)$. (ii) a 和 b 的最小公倍数

$$[a,\ b]=q_1^{v_1}q_2^{v_2}\cdots q_s^{v_s}, \tag{5}$$

其中 $v_i=\max(\alpha_i,\ \beta_i)$ $(1\leqslant i\leqslant s)$. 此外, 若 $a|D,\ b|D$, 则 $[a,\ b]|D$. (iii) 我们有

$$ab=(a,\ b)[a,\ b]. \tag{6}$$

推论3 若 $a|bc,\ (a,\ b)=1$, 则 $a|c$.

推论2的证明留给读者. 由推论2(i)及推论1立即可得到推论3(把 c 亦写为形式(3)).

一个正整数 a 的所有正除数 k 显然是完全确定的. 例如 $a=1$ 时, $k=1$; $a=5$ 时, $k=1,\ 5$; $a=8$ 时, $k=1,\ 2,\ 4,\ 8$; $a=24$ 时, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24$. 我们把 a 的所有正除数的个数记作 $d(a)$, 称为除数函数. 显有 $d(1)=1,\ d(5)=2,\ d(8)=4,\ d(24)=8$. 这是数论中的一个十分重要的函数. 如果 a 由表示式(3)给出, 那么由推论1立即得到如下结论: a

的全部正除数为

$$k=q_1^{\lambda_1}q_2^{\lambda_2}\cdots q_s^{\lambda_s}\quad(0\leqslant\lambda_i\leqslant\alpha_i,\ 1\leqslant i\leqslant s) \tag{7}$$

以及

$$d(a)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_s). \tag{8}$$

我们把定义域为全体正整数而取值为复数的函数 f 称为算术函数. 并把

$$F(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n)\quad(x\geqslant 1) \tag{9}$$

称为算术函数的和函数. 上面的除数函数 $d(a)$ 就是一个算术函数. 再如 $f(n)=1$ (若 n 为素数)与 $f(n)=0$ (若 n 不是素数), 其和函数就是 $\pi(x)$. 以后, 我们将引进其他一些有关的算术函数及其和函数.

设 f 为算术函数, 如果对任意正整数 m, n, $(m, n)=1$, 有

$$f(mn)=f(m)f(n). \tag{10}$$

则称 f 为可乘的. 如果对任意正整数 m, n 均有式(10)成立, 则称 f 为完全可乘的. 容易看出, 一个不恒等于零的可乘函数 f, 必有

$$f(1)=1. \tag{11}$$

以后, 要经常讨论如下形式的和: 设整数 $a\geqslant 1$,

$$g(a)=\sum_{k\mid a}f(k), \tag{12}$$

这里求和号展布在 a 的全体正除数上. 显然, $g(a)$ 亦是一个算术函数, 称为 f 的 Möbius 变换. 例如, 取 $f(n)\equiv 1$, 则有

$$d(a)=\sum_{k\mid a}1. \tag{13}$$

由于 k 和 a/k 同时遍经 a 的全体正除数(为什么?), 故有

$$\sum_{k\mid a}f(k)=\sum_{k\mid a}f\left(\frac{a}{k}\right). \tag{14}$$

若 a 由式(3)给出，则由式(7)知，

(15) $$\sum_{k|a} f(k) = \sum_{\lambda_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\lambda_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\lambda_s=0}^{\alpha_s} f(q_1^{\lambda_1} q_2^{\lambda_2} \cdots q_s^{\lambda_s});$$

若 f 是可乘的，则

$$\sum_{k|a} f(k) = \left(\sum_{\lambda_1=0}^{\alpha_1} f(q_1^{\lambda_1})\right)\left(\sum_{\lambda_2=0}^{\alpha_2} f(q_2^{\lambda_2})\right)\cdots\left(\sum_{\lambda_s=0}^{\alpha_s} f(q_s^{\lambda_s})\right);$$

(16)

若 f 是完全可乘的，则

$$\sum_{k|a} f(k) = \left(\sum_{\lambda_1=0}^{\alpha_1} f^{\lambda_1}(q_1)\right)\left(\sum_{\lambda_2=0}^{\alpha_2} f^{\lambda_2}(q_2)\right)\cdots\left(\sum_{\lambda_s=0}^{\alpha_s} f^{\lambda_s}(q_s)\right).$$

(17)

以上的概念和一些极简单的结论是十分重要的，在本书中经常要用到，一般在用到时不再特别说明了。

§3 几乎所有的自然数都不是素数

本节将证明

定理 1 存在一个正常数 C_1，使

(1) $$\pi(x) \leqslant C_1 x (\ln\ln x)^{-1}, \quad x \geqslant 3,$$

以及

(2) $$p_s \geqslant \frac{1}{C_1} s \ln\ln s \quad (s=1, 2, \cdots),$$

成立。

从式(1)立即推出

(3) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

这表明素数只占自然数中的极少一部份，几乎所有的自然数都不是素数。证明定理的方法实质上就是古老的 Eratosthenes 筛法。为此需要引进一个重要的算术函数——

Möbius 函数 $\mu(n)$，同时证明两个引理.

Möbius 函数 $\mu(n)$的定义如下：

$$(4)\qquad \mu(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ (-1)^r, & n=q_1q_2\cdots q_r,\ q_1<q_2<\cdots<q_r,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由算术基本定理(即§2引理1)知，任一正整数 n 的分解式(即§1(8)式)是唯一的，所以这样的定义是完全确定的. 显见，当 n 有大于1的平方因子时，必有 $\mu(n)=0$. 此外，利用分解式§1(8)容易证明：若 $(n_1, n_2)=1$，则

$$(5)\qquad \mu(n_1n_2)=\mu(n_1)\mu(n_2).$$

所以 $\mu(n)$是可乘的. 但它不是完全可乘的(为什么？)关于 Möbius 函数有下面十分重要的结论：

引理1 对任意的正整数 n，有

$$(6)\qquad \sum_{k\mid n}\mu(k)=\left[\frac{1}{n}\right]=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n>1.\end{cases}$$

证 $n=1$ 时式(6)显然成立. 当 $n>1$ 时，设其素因子分解式为 $q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}$ $(q_1<q_2<\cdots,\ q_r;\ \alpha_i>0;\ i=1, \cdots, r)$. 由于 $\mu(n)$是可乘的，故由§2(16)式及(4)得

$$\sum_{k\mid n}\mu(k)=\left(\sum_{\lambda_1=0}^{\alpha_1}\mu(q_1^{\lambda_1})\right)\left(\sum_{\lambda_2=0}^{\alpha_2}\mu(q_2^{\lambda_2})\right)\cdots\left(\sum_{\lambda_r=0}^{\alpha_r}\mu(q_r^{\lambda_r})\right)$$
$$=0,$$

最后一步用到了 $\alpha_i>0$. ▌

利用此引理可以证明

引理2 设 $x\geqslant y\geqslant 2$. 再设 $\Phi(x, y)$表示所有不超过 x 且其素因子都大于 y 的自然数的个数. 则有

$$(7)\qquad \Phi(x, y)\leqslant\frac{x}{\ln y}+2^{\pi(y)}.$$

证　设

$$P=P(y)=\prod_{p\leqslant y}p, \tag{8}$$

由 $\Phi(x,\ y)$ 的定义及引理 2 可得

$$\begin{aligned}\Phi(x,\ y)&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,P)=1}}1=\sum_{n\leqslant x}\ \sum_{k\mid(n,P)}\mu(k)\\&=\sum_{k\mid P}\mu(k)\sum_{\substack{n\leqslant x\\k\mid n}}1=\sum_{k\mid P}\mu(k)\left[\frac{x}{k}\right]\\&=x\sum_{k\mid P}\frac{\mu(k)}{k}-\sum_{k\mid P}\mu(k)\left(\frac{x}{k}-\left[\frac{x}{k}\right]\right).\end{aligned}$$

显然，$\dfrac{\mu(k)}{k}$ 是可乘函数，故由 § 2(16)式及 $\mu(k)$ 和 P 的定义得

$$\sum_{k\mid P}\frac{\mu(k)}{k}=\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\leqslant\frac{1}{\ln y},$$

最后一步用到了 § 1 中的(12)式及(16)式．此外，由 § 2 中的(13)式及(8)式可得

$$\left|\sum_{k\mid P}\mu(k)\left(\frac{x}{k}-\left[\frac{x}{k}\right]\right)\right|\leqslant\sum_{k\mid P}1=d(P)=2^{\pi(y)}.$$

由以上三式即得式(7)．▌

定理 1 的证明　对 $x\geqslant y\geqslant 2$，显然有不等式

$$\pi(x)\leqslant\pi(y)+\Phi(x,\ y) \tag{9}$$

成立．取 $y=\ln x\geqslant 2$，由上式及式(7)即得

$$\pi(x)\leqslant\frac{x}{\ln y}+2\cdot 2^{\pi(y)}\leqslant\frac{x}{\ln\ln x}+2x^{0.7}. \tag{10}$$

这就证明了式(1)．取 $x=p_s$，由式(1)及 $p_s>s$ 即得式(2)．▌

§ 4　Чебышев 不 等 式

在本章 § 1 和 § 3 中我们得到了 $\pi(x)$ 的如下形式的上下

界估计(见§1(10)式和§3(1)式):

$$C_2 \ln x \leqslant \pi(x) \leqslant C_1 x (\ln\ln x)^{-1}, \ x \geqslant 3.$$

这是十分粗糙的. 本节要证明以下的 Чебышев 不等式.

定理1 对 $x \geqslant 2$, 有

$$\frac{\ln 2}{3} \frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant 6 \ln 2 \frac{x}{\ln x}. \tag{1}$$

为证明这不等式, 需要下面的引理, 这引理实际上给出了 $n!$ 的素因子分解式.

引理1 设 n 是正整数, p 是素数. 再设 $\alpha = \alpha(p, n)$ 使得 $p^{\alpha} \| n!$, 即 $p^{\alpha} | n!$, 但 $p^{\alpha+1} \nmid n!$. 那末

$$\alpha = \alpha(p, n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right]. \tag{2}$$

因而有

$$\ln n! = \sum_{p \leqslant n} \alpha(p, n) \ln p. \tag{3}$$

证 由于当 $p^i > n$ 时, $\left[\frac{n}{p^i}\right] = 0$, 所以式(2)中的级数实际上是一个有限和. 我们用归纳法来证明式(2). 当 $n=1$ 时, $\alpha=0$, 式(2)显然成立. 设 $n \geqslant 2$. 假设式(2)对所有小于 n 的正整数均成立. 设 $p^{\lambda} \| n$, 显然有

$$\alpha(p, n) = \alpha(p, n-1) + \lambda. \tag{4}$$

此外, 容易看出

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{n-1}{p^i}\right] = \begin{cases} 1, & p^i | n, \\ 0, & p^i \nmid n. \end{cases}$$

由此及 $p^{\lambda} \| n$ 可得:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\lambda}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{n-1}{p^i}\right]\right) + \sum_{i=\lambda+1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{n-1}{p^i}\right]\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{p^i}\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] - \alpha(p, n-1),$$

上式最后一步用到了归纳假设．由此及式(4)就证明了式(2)对 n 亦成立．由归纳法知式(2)对所有正整数都成立．

注意到 $n!$ 不会有大于 n 的素因子，由式(2)，算术基本定理(§2 引理 1)及 §2 推论 1(取 $b=n!$, $a=p^{\alpha}$)，即得 $n!$ 的素因子分解式为

(5) $$n! = \prod_{p\leqslant n} p^{\alpha(p,n)},$$

上式两边取对数即得式(3)．】

定理 1 的证明 设 n 是正整数，

(6) $$N=(2n)!/(n!)^2.$$

对 N 显然有不等式

(7) $$2^n\leqslant \frac{2n}{n}\,\frac{2n-1}{n-1}\cdots\frac{n+1}{1}=N=\frac{(2n)!}{(n!)^2}<(1+1)^{2n}=4^n.$$

另一方面，由式(3)得

(8) $$\begin{aligned}\ln N &= \ln(2n)!-2\ln(n!)\\ &=\sum_{p\leqslant n}(\alpha(p,2n)-2\alpha(p,n))\ln p\\ &\quad+\sum_{n<p\leqslant 2n}\alpha(p,2n)\ln p.\end{aligned}$$

容易看出，

(9) $$\alpha(p,2n)=1,\ n<p\leqslant 2n.$$

当 $p\leqslant n$ 时，由不等式 $0\leqslant[2y]-2[y]\leqslant 1$ 及式(2)可得

(10) $$\begin{aligned}0&\leqslant\alpha(p,2n)-2\alpha(p,n)\\ &=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^i}\right]-2\left[\frac{n}{p^i}\right]\right)\leqslant\left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right].\end{aligned}$$

由以上三式即得

(11) $$\sum_{n<p\leqslant 2n}\ln p\leqslant\ln N\leqslant\sum_{p\leqslant 2n}\left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]\ln p.$$

因而有

$$(12)\qquad (\pi(2n)-\pi(n))\ln n\leqslant \ln N\leqslant \pi(2n)\ln(2n).$$

由式(7)和(12)得

$$(13)\qquad \pi(2n)\ln(2n)\geqslant n\ln 2.$$

$$(14)\qquad (\pi(2n)-\pi(n))\ln n\leqslant 2n\ln 2.$$

当 $x\geqslant 6$ 时，取 $n=\left[\frac{x}{2}\right]$. 显有 $2n\leqslant x<3n$，由此及式(13)即得

$$\pi(x)\ln x\geqslant\frac{\ln 2}{3}x,$$

由直接验算知，上式当 $2\leqslant x<6$ 时亦成立，这就证明了式(1)的左端不等式.

在式(14)中取 $n=2^k$，得

$$k(\pi(2^{k+1})-\pi(2^k))\leqslant 2^{k+1}.$$

由此及显然估计 $\pi(2^{k+1})\leqslant 2^k\ (k\geqslant 0)$，得到

$$(k+1)\pi(2^{k+1})-k\pi(2^k)\leqslant 3\cdot 2^k.$$

对上式从 $k=0$ 到 $m-1$ 求和得到

$$m\pi(2^m)<3\cdot 2^m.$$

对任意 $x\geqslant 2$，必有整数 $m\geqslant 1$，使得 $2^{m-1}<x\leqslant 2^m$. 由此及上式得

$$\pi(x)\leqslant\pi(2^m)<3\frac{2^m}{m}<6\ln 2\frac{x}{\ln x},$$

这就证明了式(1)的右端不等式. ▌

推论 1

$$(15)\qquad \frac{1}{5}s\ln s\leqslant p_s\leqslant 20s\ln s,\quad (s\geqslant 2).$$

证 由式(1)显然可得

$$\frac{1}{5}\frac{x}{\ln x}\leqslant\pi(x)\leqslant 5\frac{x}{\ln x},\quad (x\geqslant 2).$$

取 $x=p_s$，即得

(16) $$\frac{1}{5}p_s \leqslant s\ln p_s \leqslant 5p_s, \quad (s \geqslant 1).$$

由上式的右端不等式及 $p_s > s$ 即得式(15)的左端不等式. 而由式(16)的左端不等式可得

$$\ln p_s \leqslant \ln(5s) + \ln\ln p_s < \ln(5s) + \frac{1}{2}\ln p_s.$$

故当 $s \geqslant 5$ 时，有

$$\ln p_s < 4\ln s.$$

由此及式(16)得

$$p_s \leqslant 20 s \ln s \quad (s \geqslant 5).$$

由直接验算可知，上式当 $2 \leqslant s < 5$ 时亦成立. 这就证明了式(15)的右端不等式. ▌

§5 Чебышев 函数 $\theta(x)$ 和 $\psi(x)$

Чебышев 为了证明素数定理，引进了两个新的函数：

(1) $$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p,$$

及

(2) $$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n),$$

其中 $\Lambda(n)$ 是所谓 Mangoldt 函数，定义如下：

(3) $$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & n = p^m (m \geqslant 1), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

($\Lambda(n)$ 不是可乘函数). 本节将初步讨论 $\pi(x)$、$\theta(x)$ 及 $\psi(x)$ 这三个函数之间的关系，并导出 Чебышев 不等式及素数定理的等价形式.

定理 1 (i) 对任给的正数 $\lambda < 1$，及 $x \geqslant 1$ 有

(4) $$\lambda(\pi(x) - x^{\lambda})\ln x \leqslant \theta(x) \leqslant \pi(x)\ln x \quad (x \geqslant 1).$$

(ii) 对 $x\geqslant 1$ 有

(5) $$\psi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\theta(x^{\frac{1}{m}}),$$

(6) $$\theta(x)\leqslant\psi(x)\leqslant\theta(x)+x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x.$$

证 由 $\theta(x)$ 的定义立即推得式(4)的右端不等式. 由显然估计 $\pi(x^\lambda)<x^\lambda$ 及

$$\theta(x)=\sum_{p\leqslant x^\lambda}\ln p+\sum_{x^\lambda<p\leqslant x}\ln p\geqslant\lambda\ln x(\pi(x)-\pi(x^\lambda))$$

即得式(4)的左端不等式. 现来证明式(5). 由于当

(7) $$m>\left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right]=M$$

时, $\theta(x^{\frac{1}{m}})=0$, 所以式(5)中的级数实际上是一有限和. 由 $\psi(x)$ 及 $\theta(x)$ 的定义知*)

$$\psi(x)=\sum_{p^m\leqslant x}\ln p=\sum_{m=1}^{M}\sum_{p\leqslant x^{1/m}}\ln p=\sum_{m=1}^{M}\theta(x^{\frac{1}{m}})$$

这就证明了式(5). 当 $m\geqslant 2$ 时, 利用显然估计

$$0\leqslant\theta(x^{\frac{1}{m}})\leqslant x^{\frac{1}{m}}\ln(x^{\frac{1}{m}}),$$

由上式即得

$$\theta(x)\leqslant\psi(x)\leqslant\theta(x)+\sum_{m=2}^{M}x^{\frac{1}{m}}\ln(x^{\frac{1}{m}})$$
$$\leqslant\theta(x)+Mx^{\frac{1}{2}}\ln(x^{\frac{1}{2}}),$$

由此及式(7)即得式(6). ∎

注意 本定理的证明没有利用前面所证明的任何结果.

由定理 1 立即可推出 Чебышев 不等式的等价形式. (请读者自己证明.)

定理 2 以下三个命题是等价的:

---

*) 求和号 $\sum_{p^m\leqslant x}$ 是表示对两个变数 m 和 p 求和.

(8) $$C_1 \frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant C_2 \frac{x}{\ln x} \quad (x \geqslant 2);$$

(9) $$C_3 x \leqslant \theta(x) \leqslant C_4 x \quad (x \geqslant 2);$$

(10) $$C_5 x \leqslant \psi(x) \leqslant C_6 x \quad (x \geqslant 2).$$

§ 4 定理 1 已经证明了估计式 (8) 成立. 所以估计式(9)和(10)亦成立. 它们都称为 Чебышев 不等式. 在本章最后一节将直接给出估计式 (10) 的证明(见 § 8 定理 1), 它要比 § 4 定理 1 的证明稍为简单些.

下面我们利用定理 1 来证明素数定理的等价形式.

定理 3 以下三个命题是等价的:

(11) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1;$$

(12) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1;$$

(13) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

证 由式 (6) 可立即推出命题(12)与(13)等价. 下面证明命题(11)与(12)等价. 由式(4)知, 对任意正数 $\lambda<1$, 有

(14) $$\lambda \varlimsup_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\ln x}{x} \leqslant \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \leqslant \varlimsup_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\ln x}{x}.$$

由于 λ 可任意接近于 1, 故得

(15) $$\varlimsup_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\ln x}{x} = \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}.$$

这就证明了前两个命题的等价性. ▌

注. 将式(14)及(15)中的上极限改为下极限, 不等式仍成立. 由此亦可推出命题(11)和(12)等价.

在定理 1 中给出的 $\pi(x)$ 与 $\theta(x)$ 的关系式是十分粗糙的. 它们之间的一个重要关系式将在第三章 § 1 中给出 (见第三章 § 1 定理 1).

Чебышев 引进的这两个函数，特别是 $\psi(x)$，对素数分布的研究及素数定理的证明起着极其重要的作用．为了便于研究 $\psi(x)$ 的性质，下一节首先讨论初等数论中的一个重要内容——Möbius 变换．

§6 Möbius 变 换

在本章§2中我们已经定义了一个算术函数 $f(n)$ 的 Möbius 变换 $g(n)$（见§2(12)式）．利用 Möbius 函数 $\mu(n)$ 的性质（§3引理1），可以反过来用 $g(n)$ 表示 $f(n)$，这就是著名的 **Möbius 反转公式**：

引理1 设 $f(n)$，$g(n)$ 是算术函数．若

$$g(n)=\sum_{d\mid n} f(d), \tag{1}$$

则

$$f(n)=\sum_{d\mid n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right). \tag{2}$$

反过来，若式(2)成立，则式(1)亦成立．

证 设式(1)成立，由交换求和号可得

$$\sum_{d\mid n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n} \mu(d) \sum_{k\mid \frac{n}{d}} f(k)=\sum_{k\mid n} f(k) \sum_{d\mid \frac{n}{k}} \mu(d)$$
$$=f(n).$$

上式最后一步用到了§3引理1．这就证明了引理的第一部份．现设式(2)成立．由式§2(14)式知，(2)式可写为

$$f(n)=\sum_{d\mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d). \tag{3}$$

因而，由交换求和号可得

$$\sum_{d\mid n} f(d)=\sum_{d\mid n} \sum_{k\mid d} \mu\left(\frac{d}{k}\right) g(k)=\sum_{k\mid n} g(k) \sum_{\substack{d\mid n\\ k\mid d}} \mu\left(\frac{d}{k}\right),$$

在内层和作变量替换 $d=kr$，由 § 3 引理 1 即得

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{k|n} g(k) \sum_{r|\frac{n}{k}} \mu(r) = g(n)$$

这就证明了式(1)成立. ∎

下面我们来求 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的 Möbius 变换.

引理 2 对任意的正整数 n 有

(4) $$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n.$$

证 设 n 的素因子分解式为 $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_r^{\alpha_r}$. 由 $\Lambda(n)$ 的定义(§ 5(3)式)及 § 2(15)式，得

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \Lambda(d) &= \sum_{\lambda_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\lambda_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\lambda_r=0}^{\alpha_r} \Lambda(q_1^{\lambda_1} q_2^{\lambda_2} \cdots q_r^{\lambda_r}) \\ &= \sum_{\lambda_1=1}^{\alpha_1} \sum_{\lambda_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\lambda_r=0}^{\alpha_r} \Lambda(q_1^{\lambda_1} q_2^{\lambda_2} \cdots q_r^{\lambda_r}) \\ &\quad + \sum_{\lambda_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\lambda_r=0}^{\alpha_r} \Lambda(q_2^{\lambda_2} \cdots q_r^{\lambda_r}) \\ &= \sum_{\lambda_1=1}^{\alpha_1} \Lambda(q_1^{\lambda_1}) + \sum_{\lambda_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\lambda_r=0}^{\alpha_r} \Lambda(q_2^{\lambda_2} \cdots q_r^{\lambda_r}) \\ &= \alpha_1 \ln q_1 + \sum_{\lambda_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\lambda_r=0}^{\alpha_r} \Lambda(q_2^{\lambda_2} \cdots q_r^{\lambda_r}),\end{aligned}$$

继续对最后一个多重和这样化简，即得

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \alpha_1 \ln q_1 + \alpha_2 \ln q_2 + \cdots + \alpha_r \ln q_r,$$

由此即得式(4). ∎

由引理 1 和引理 2 可推出

(5) $$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln \frac{n}{d} = \sum_{d|n} -\mu(d) \ln d,$$

最后一步用到了 § 3 引理 1. 这表明 $-\mu(n)\ln n$ 的 Möbius 变换是 $\Lambda(n)$. 因而，由式(5)及引理 1 可得

(6) $$-\mu(n) \ln n = \sum_{d|n} \mu(d) \Lambda\left(\frac{n}{d}\right).$$

由引理 1 可证明

引理 3 设 $F(x)$、$G(x)$是定义在 $x\geqslant 1$ 上的函数. 若

(7) $$G(x)=\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)\quad(x\geqslant 1),$$

则

(8) $$F(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)G\left(\frac{x}{n}\right)\quad(x\geqslant 1).$$

反过来, 若式(8)成立, 则式(7)也成立.

证 若式(7)成立, 作变量替换 $r=mn$(n 固定)后交换求和号, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)G\left(\frac{x}{n}\right)&=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}F\left(\frac{x}{mn}\right)\\&=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\sum_{\substack{r\leqslant x\\ n\mid r}}F\left(\frac{x}{r}\right)\\&=\sum_{r\leqslant x}F\left(\frac{x}{r}\right)\sum_{n\mid r}\mu(n),\end{aligned}$$

由此及 § 3 引理 1 即得式 (8). 这就证明了第一个结论. 反过来, 若式(8)成立, 交换求和号后作变量替换 $r=mn$(m 固定), 再交换求和号, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)&=\sum_{n\leqslant x}\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}\mu(m)G\left(\frac{x}{mn}\right)\\&=\sum_{m\leqslant x}\mu(m)\sum_{n\leqslant\frac{x}{m}}G\left(\frac{x}{mn}\right)\\&=\sum_{m\leqslant x}\mu(m)\sum_{\substack{r\leqslant x\\ m\mid r}}G\left(\frac{x}{r}\right)\\&=\sum_{r\leqslant x}G\left(\frac{x}{r}\right)\sum_{m\mid r}\mu(m),\end{aligned}$$

由此及 § 3 引理 1 即得式(7).

如果在引理3中取 $F(x)=1\ (x\geqslant 1)$，则 $G(x)=[x]$，因而就得到

(9) $$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]=1\quad (x\geqslant 1).$$

这是一个十分重要的公式.

给出了一个函数 $F(x)\ (x\geqslant 1)$，则就可以由式(7)来定义一个函数 $G(x)\ (x\geqslant 1)$，$G(x)$就称为是 $F(x)$的广义 Möbius 变换. 引理3通常称为广义 Möbius 反转公式.

Möbius 变换和广义 Möbius 变换这两种运算在数论中是十分重要的，以后要经常用到，并要作进一步的讨论(见第六章).

最后，我们要指出本节所有结论的证明都是基于 Möbius 函数 $\mu(n)$的基本性质——§3 引理1.

§7 $\psi(x)$的基本性质

设 $\psi(x)$的广义 Möbius 变换为

(1) $$T(x)=\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right),\quad (x\geqslant 1).$$

由 $\psi(x)$的定义不难看出

(2) $$T(x)=\sum_{mn\leqslant x}\Lambda(m)=\sum_{m\leqslant x}\Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right],$$

其中 $\sum\limits_{mn\leqslant x}$ 是表示对两个变量 m、n 求和. 利用上一节的结果就可证明 $\psi(x)$的一个最重要、最基本的性质:

定理 1

(3) $$\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=\ln([x]!),\quad (x\geqslant 1),$$

即 $\psi(x)$的广义 Möbius 变换

(4) $$T(x)=\ln([x]!),\quad (x\geqslant 1).$$

证 在式(2)中作变量替换 $r=mn$(m 固定)得到

(5) $$T(x)=\sum_{r\leqslant x}\sum_{m\mid r}\Lambda(m)=\sum_{r\leqslant x}\ln r,$$

最后一步用到了§6引理1这就证明了定理. ▌

我们可以不用§6引理1而用§4引理1——即 $n!$ 的素因子分解式(§4(3)式)来证明.

定理1的第二个证明 当 n 为正整数时,有

(6) $$\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$$

(证明见第一章§3性质5). 由§4引理1, (6)式及 $\Lambda(n)$ 的定义(见§5(3)式)可得:

$$\begin{aligned}\ln([x]!)&=\sum_{p\leqslant [x]}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{[x]}{p^i}\right]\right)\ln p=\sum_{p\leqslant x}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^i}\right]\right)\ln p\\&=\sum_{p\leqslant x}\sum_{i=1}^{\infty}\Lambda(p^i)\left[\frac{x}{p^i}\right]=\sum_{p^i\leqslant x}\Lambda(p^i)\left[\frac{x}{p^i}\right]\\&=\sum_{d\leqslant x}\Lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right],\end{aligned}$$

由此及式(2)就得到式(4). ▌

应该指出, 由于§6引理1的证明是基于§3引理1, 所以这两个证明都是基于算术基本定理(§2引理1), 即定理1是算术基本定理的一个推论.

定理1的重要性在于把一个性质很不清楚的函数 $\psi(x)$ 和我们很熟悉的对数函数联系了起来, 建立了一个十分简单明确的公式. 为研究 $\psi(x)$, 进而研究素数分布, 提出了一个有效途径.

由广义 Möbius 反转公式(§6引理3)及定理1立即得到 $\psi(x)$ 的一个表达式

(7) $$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\ln\left(\left[\frac{x}{n}\right]!\right)\quad(x\geqslant 1).$$

(7)式也可以不依赖于定理1及§6引理3，而利用§6(5)式的第一式及$\psi(x)$的定义直接证明(留给读者)．所以式(3)和式(7)是互相独立的．

虽然我们利用熟知的对数函数给出了$\psi(x)$的一个表达式，为研究素数分布提供了某些方便(见第三章)，但其中仍出现一个和$\Lambda(n)$一样很不规则的函数$\mu(n)$，这是造成素数定理的证明十分困难的主要原因．

最后我们来证明$\ln([x]!)$的一个渐近公式，这是本章中唯一要用到积分的结果．

引理1 对$x\geqslant 1$，有

(8) $$\ln([x]!)=x\ln x-x+O(\ln(2x)).$$

证 由对数函数的递增性知

$$\ln n<\int_n^{n+1}\ln t\,dt<\ln(n+1).$$

故当$x\geqslant 1$时，有

$$\begin{aligned}\ln([x]!)&=\sum_{n\leqslant[x]-1}\ln n+\ln[x]\\&\leqslant\sum_{n\leqslant[x]-1}\int_n^{n+1}\ln t\,dt+\ln x\\&\leqslant\int_1^x\ln t\,dt+\ln x,\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\ln([x]!)&=\sum_{2\leqslant n\leqslant[x]}\ln n\geqslant\sum_{2\leqslant n\leqslant[x]}\int_{n-1}^n\ln t\,dt\\&\geqslant\int_1^{[x]}\ln t\,dt\geqslant\int_1^x\ln t\,dt-\ln x.\end{aligned}$$

利用熟知的积分

$$\int_1^x\ln t\,dt=x\ln x-x+1\quad(x>0),$$

由以上两式即得式(8). ∎

由式(3)和(8)即得

$$\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=x\ln x-x+O(\ln x),\quad x\geqslant 1. \tag{9}$$

§8 Чебышев 不等式的另一证明

本节将利用 §7 定理 1 来直接证明 §5 估计式(10),因而由 §5 定理 2 知,这就给出了 Чебышев 不等式的另一证明. 下面证明

定理 1 对 $x\geqslant 2$ 有

$$\left(\frac{1}{4}\ln 2\right)x\leqslant\psi(x)\leqslant(4\ln 2)x. \tag{1}$$

证 设 n 为正整数,由 §7(3)式得

$$\begin{aligned}\ln(2n)!-2\ln n! &= \sum_{k\leqslant 2n}\psi\left(\frac{2n}{k}\right)-2\sum_{k\leqslant n}\psi\left(\frac{n}{k}\right)\\ &=\sum_{k\leqslant 2n}\psi\left(\frac{2n}{k}\right)-2\sum_{k\leqslant n}\psi\left(\frac{2n}{2k}\right)\\ &=\sum_{k\leqslant 2n}(-1)^{k-1}\psi\left(\frac{2n}{k}\right),\end{aligned}$$

因而有($\psi(x)$是增函数)

$$\psi(2n)-\psi(n)\leqslant\ln\frac{(2n)!}{(n!)^2}\leqslant\psi(2n), \tag{2}$$

由此及 §4(7)式得

$$\psi(2n)\geqslant n\ln 2, \tag{3}$$

$$\psi(2n)-\psi(n)\leqslant 2n\ln 2. \tag{4}$$

对 $x\geqslant 2$, 由式(3)得

$$\psi(x)\geqslant\psi\left(2\left[\frac{x}{2}\right]\right)\geqslant\left[\frac{x}{2}\right]\ln 2>\left(\frac{1}{4}\ln 2\right)x.$$

而对任意的 $x\geqslant 2$ 必有正整数 m，使 $2^{m-1}<x\leqslant 2^m$，这样，由(4)式得

$$\psi(x)\leqslant\psi(2^m)=\sum_{k=0}^{m-1}(\psi(2^{k+1})-\psi(2^k))<2^{m+1}\ln 2$$
$$<(4\ln 2)x.$$

这就证明了式(1). ▌

可以看出，这一证明比 §4 定理 1 的证明要简洁些，这也表明了引进函数 $\psi(x)$ 的好处. 此外，我们要指出：这定理的证明表明 Чебышев 不等式是 §7(3)式的推论.

第二章习题

1. 试证明有无穷多个形如 $4n+3$ 的素数.
2. 试证明有无穷多个形如 $6n+5$ 的素数.
3. 对任给的正整数 k，必有两个相邻的素数 p_s，p_{s+1}，使得 $p_{s+1}-p_s>k$.
4. 设 F_n 是由 §1(7) 式给出的 Fermat 数. 试证明 $F_{n+1}=F_1F_2\cdots F_n+1\quad(n\geqslant 1)$. 由此证明 §1 定理 1.
5. 设 $A_1=2$，$A_{n+1}=A_n^2-A_n+1$. 试证明 $(A_n, A_m)=1$ $(n\neq m)$. 由此推出 §1 定理 1. [提示：$A_{n+1}=A_1A_2\cdots A_n+1$].
6. 设 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 是 s 个不同的素数，A_r 是其中任意取定的 r 个素数的乘积$(1\leqslant r\leqslant s)$，以及 $A_0=1$. 再设 C 为任意整数，$(C, A_r)=1$. 试证明对 $0\leqslant r\leqslant s$，有
$$\left(A_r+\frac{Cq_1\cdots q_s}{A_r},\ q_i\right)=1\quad(1\leqslant i\leqslant s).$$
由此证明 §1 定理 1.
7. 设整数 $N\geqslant 2$，$q_1, q_2, \cdots, q_s$ 是任意给定的 s 个不大于 N 的不同的素数. 再设 T 是所有不大于 N 且可表为 $q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_s^{\alpha_s}$ $(\alpha_1\geqslant 0, \alpha_2\geqslant 0, \cdots, \alpha_s\geqslant 0)$的正整数的个数. 试证明
$$T\leqslant\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{\ln N}{\ln q_i}\right).$$
由此推出 §1 定理 1 及

$$\pi(N)>\frac{\ln N}{\ln\ln N+1.5}\quad (N\geqslant 2).$$

8. 试证明 $\sum_{p<x}\frac{1}{p-1}>\ln\ln([x]+1)$. [提示：利用 § 1 引理 4.]

9. 试证明：存在正数 c，使 $\sum_{p<x}\frac{1}{p}>\ln\ln([x]+1)-c$.

10. 试 证 明：$\alpha=\sum_{s=1}^{\infty}p_s 10^{-2^s}$ 收敛，以及有

$$p_s=[10^{2^s}\alpha]-10^{2^{s-1}}[10^{2^{s-1}}\alpha].$$

11. 试证明：§ 2 引理 1 和引理 2 是等价的.

12. 试证明：§ 2 推论 2 及推论 3.

13. 设整数 $r\geqslant 2$. 试证明：任意正整数 n 必可唯一表为 $m^r l$，其中 m，l 为正整数，且不存在素数 p，使得 $p^r|l$. 这种 l 通常称为*无 r 次方因子数*，当 $r=2$ 时称为*无平方因子数*.

14. 设$(a, b)=p$，p 为素数. 求(a^2, b)、(a^3, b)和(a^2, b^3) 可能取的值.

15. 设$(a, b)=c$，证明 $(a^2, b^2)=c^2$.

16. 设 a、b 为正整数，$(a, b)=1$. 试证明：$ab=l^k$ 的充要条件是：$a=m^k$，$b=n^k$，其中 k，l，m，n 均为正整数.

17. 把 § 2 推论 2 的(i)和(ii)推广到 r 个正整数的情形，即求最大公约数$(a_1, a_2, \cdots, a_r)$和最小公倍数 $[a_1, a_2, \cdots, a_r]$.

18. 试证明 $(a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}, a_r)=((a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}), a_r)$.

19. 试证明 $[a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}, a_r]=[[a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}], a_r]$.

20. 若 $(a_1, a_2, a_3)[a_1, a_2, a_3]=a_1a_2a_3$，则 $(a_1, a_2)=(a_2, a_3)=(a_3, a_1)=1$. 把这结果推广到 $r>3$ 的情形.

21. 设 a_1，a_2，a_3 是正整数，试证明 $[a_1, a_2, a_3](a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1)=a_1a_2a_3$.

22. 设 f、g 是可乘函数，试证明：

(a) $|f(n)|$亦是可乘函数；

(b) 当 $f(n)\neq 0$ 时，$\frac{1}{f(n)}$ 亦是可乘函数；

(c) $f(n)g(n)$是可乘函数.

把以上结果推广到完全可乘函数的情形.

23. 试证明除数函数 $d(n)$是可乘函数.

24. 试证明: $f(n)$的 Möbius 变换的 Möbius 变换等于 $\sum_{k|n} f(k)d\left(\frac{n}{k}\right)$, $d(n)$为除数函数.

25. 设$(m_1, m_2)=1$, $m=m_1m_2$. 试证明: 在m的正除数d和m_1、m_2的正除数d_1、d_2之间可建立如下的一一对应关系: 若$d|m$, 则必存在唯一的一对d_1、d_2, 使得$d_1|m_1$, $d_2|m_2$及$d=d_1d_2$; 反之; 若$d_1|m_1$, $d_2|m_2$, 则$d_1d_2=d|m$.

26. 设m_1、m_2是正整数, $(m_1, m_2)=1$, $m=m_1m_2$. 试证明对任意的算术函数f, 有

$$\sum_{d|m} f(d)=\sum_{d_1|m_1}\sum_{d_2|m_2} f(d_1d_2).$$

由此证明可乘函数的 Möbius 变换亦是可乘函数. 完全可乘函数的 Möbius 变换是否一定是完全可乘的? 试举例说明.

27. 设$(a, b)>1$, 试证明$d(ab)<d(a)d(b)$, a、b为正整数.

28. 试证明 $\prod_{k|a} k=a^{\frac{1}{2}d(a)}$ (a为正整数).

29. 试证明: $d(a)$是奇数的充要条件是: a为完全平方数.

30. 试证明 $\sum_{k|n} d^3(k)=(\sum_{k|n} d(k))^2$.

31. 设g_1、g_2分别为f_1、f_2的 Möbius变换. 试证明:

(a) $\sum_{d|n} g_1(d)f_2\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n} f_1(d)g_2\left(\frac{n}{d}\right)$;

(b) g_1g_2是$f(n)=\sum_{[s,t]=n} f_1(s)f_2(t)$的 Möbius 变换, 这里求和号是表示对所有最小公倍数等于n的有序正整数对s、t求和.

32. 设s是复数, $\sigma_s(a)=\sum_{k|a} k^s$, 试证明: (a)$\sigma_0(a)=d(a)$; (b) $\sigma_{-s}(a)=a^{-s}\sigma_s(a)$; (c) 若$s\neq0$, a由 § 1(8)式给出, 则

$$\sigma_s(a)=\prod_{j=1}^{r}\frac{q_j^{(\alpha_j+1)s}-1}{q_j^s-1}.$$

33. 试证明: 对可乘函数f, 有

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=\prod_{p|n}(1-f(p)).$$

34. 设$\omega(n)$表示n的不同的素因数的个数, $\omega(1)=0$. (如$\omega(2)=1$, $\omega(4)=1$, $\omega(6)=2$等.)试证明:

(a) $\sum_{d|n}|\mu(d)|=2^{\omega(n)}$;

(b) $\sum_{k|n}\mu(k)d(k)=(-1)^{\omega(n)}$;

(c) 计算$\sum_{k|n}\mu(k)\sigma_1(k)$ ($\sigma_1(n)$的定义见第 32 题).

35. 设 n 是正整数, n_1 是 n 的全部不同的素因数的乘积. 试证明

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=\sum_{d|n_1}\mu(d)f(d).$$

36. 试证明 $\sum_{d^2|n}\mu(d)=\mu^2(n)=|\mu(n)|$, 这里的求和号是表示对所有其平方能整除 n 的正整数 d 求和.

37. 设整数 $k\geqslant 3$, 试证明

$$\sum_{d^k|n}\mu(d)=\begin{cases}0, & \text{若有 } m^k|n,\ m>1;\\ 1, & \text{其它.}\end{cases}$$

这里的求和号是表示对所有其 k 次方能整除 n 的正整数 d 求和.

38. 设整数 $a_i\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant r)$, $n=a_1+\cdots+a_r$, 试证明 $n!/(a_1!\cdots a_r!)$是整数. [提示: 利用 § 4 引理 1 及 $[x+y]\geqslant[x]+[y]$].

39. 试证明$(2n)!/(n!)^2$是偶数.

40. 设 p 是素数, $p^{e_1}\|(2n)!!$. 求 e_1 的计算公式.

41. 设 p 是素数, $p^{e_2}\|(2n+1)!!$. 求 e_2 的计算公式.

42. 试证明 $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{\ln p_s}{\ln s}=1$.

43. 试证明: 存在正数 c, 使得 $\sum\limits_{p\leqslant x}\dfrac{1}{p}\leqslant c\ln\ln x$ $(x\geqslant 3)$.

44. 试证明: 级数 $\sum\limits_{p}\dfrac{1}{p(\ln\ln p)^{\lambda}}$ 当 $\lambda>1$ 时收敛; 当 $\lambda\leqslant 1$ 时发散.

45. 按以下步骤来证明 Bertrand 假设(见(f)):

(a) 当 $n\geqslant 5$ 时, § 4(11)式的右端不等式可改进为

$$\ln\frac{(2n)!}{(n!)^2}\leqslant\sum_{n<p\leqslant 2n}\ln p+\sum_{\sqrt{2n}<p\leqslant\frac{2}{3}n}\ln p+\sum_{p\leqslant\sqrt{2n}}\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]\ln p;$$

(b) 当 $n\geqslant 5$ 时, 有 $\dfrac{1}{2n}2^{2n}<\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}<2^{2(n-1)}$;

(c) 当 $a\geqslant 5$ 时, 有 $\sum\limits_{a<p\leqslant 2a}\ln p<2(a-1)\ln 2$;

(d) 当 $n\geqslant 50$ 时, 有

$$\sum_{\sqrt{2n}<p\leqslant\frac{2}{3}n}\ln p\leqslant\frac{4}{3}n\ln 2;$$

[提示: $\sum\limits_{\sqrt{2n}<p\leqslant\frac{2}{3}n} \leqslant \sum\limits_{a_1<p\leqslant 2a_1}+\cdots+\sum\limits_{a_s<p\leqslant 2a_s}$, 其中 a_1 是不小于 $\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}n\right]$ 的最小整数, a_{i+1} 是不小于 $\frac{1}{2}a_i$ 的最小整数, 而 s 满足 $\frac{\sqrt{2n}}{2}\leqslant a_s<\sqrt{2n}$.]

(e) 当 $n\geqslant 50$ 时, 有 $\sum\limits_{n<p\leqslant 2n}\ln p\geqslant \frac{2}{3}n\ln 2-(\sqrt{2n}+1)\ln(2n)$;

(f) 对任意正整数 n, 必有素数 p, 使得 $n<p\leqslant 2n$. [提示: $n\geqslant 512$ 时, 可由(e)推出, $n<512$ 时, 直接验证.]

(g) 当 $n\geqslant 6$ 时, 必有两个素数 p、p', 使得 $n<p<p'<2n$.

46. 一定存在两个正常数 c_1、c_2, 使得当 $x\geqslant 3$ 时, 有

$$c_1\frac{x}{\ln x}\leqslant \pi(2x)-\pi(x)\leqslant c_2\frac{x}{\ln x}.$$

47. 试证明: 素数定理等价于 $p_s\sim s\ln s\quad(s\to\infty)$.

48. 试证明 § 5 定理 2.

49. 试证明 $\psi(x)=\theta(x)+O(x^{\frac{1}{2}})$.

50. 设整数 $n\geqslant 2$, $P_n=\prod\limits_{p\leqslant n}p$. 试证明 $P_n<4^n$. 由此推出: 当 $x\geqslant 2$ 时, $\theta(x)<(2\ln 2)x$. [提示: 用归纳法: 当 $n=2k+1$ 时, 设 $P_{2k+1}=P_{k+1}N$, 则有 N 整除 $\binom{2k+1}{k}$.]

51. 试证明 $\theta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(n)\psi(x^{\frac{1}{n}})$.

52. 试证明:

(a) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\pi(x)\ln x}{x}=\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\theta(x)}{x}=\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\psi(x)}{x}$;

(b) $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\pi(x)\ln x}{x}=\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\theta(x)}{x}=\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\psi(x)}{x}$.

53. 若积分 $\int_1^{\infty}\frac{\psi(t)-t}{t^2}dt$ 收敛, 则素数定理 $\psi(x)\sim x$ 必成立.
[提示: 用反证法: 分 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\psi(x)}{x}=c_1>1$ 和 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\psi(x)}{x}=c_2<1$ 两种情形来证.]

54. 试证明当 $x\geqslant 1$ 时，有

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\right|\leqslant 1.$$

[提示：利用 § 6(9)式.]

55. 试证明$\sum_{k|n}\mu(k)d\left(\frac{n}{k}\right)=1$.

56. 试证明 $\sum_{d|n}\sigma_1(d)=n\sum_{k|n}\frac{d(k)}{k}$ （$\sigma_1(n)$的定义见第 32 题）.

57. 试证明：函数 $[x]$ 的广义 Möbius 变换为 $D(x)=\sum_{n\leqslant x}d(n)$.

58. 设 m 是正整数. 试证明：当 n 有多于 m 个不同的素因子时，必有

$$\sum_{d|n}\mu(d)(\ln d)^m=0.$$

[提示：用归纳法.]

59. 设 f, g, h 为算术函数，$f(1)\neq 0$. 如果

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d),\qquad g(n)=\sum_{d|n}f(d)h\left(\frac{n}{d}\right),$$

则 h 一定是 Möbius 函数 $\mu(n)$.

60. 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的非负递增函数. 试证明

$$\left|\sum_{a<n\leqslant b}f(n)-\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant f(b).$$

61. 试证明 $\sum_{n\leqslant x}\ln^2 n=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+O(\ln^2 2x)$.

62. 设 k 为正整数. 试证明

$$\sum_{n\leqslant x}\ln^k n=xP_k(\ln x)+O(\ln^k 2x),$$

其中 $P_k(y)$ 是一 k 次多项式. O 常数和 k 有关吗?

63. 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的非负递减函数. 试证明

$$\left|\sum_{a<n\leqslant b}f(n)-\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant f(a).$$

64. 试证明 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\ln x+O(1)$.

65. 设 $\lambda>0$, 试证明 $\sum_{n\leqslant x}\frac{(\ln n)^\lambda}{n}=\frac{1}{1+\lambda}(\ln x)^{1+\lambda}+O(1)$, O 常数和 λ 有关.

66. 试证明上题当 $\lambda>-1$ 时亦成立.

67. 试证明当 $\lambda\geqslant 0$ 时，有 $\sum\limits_{n\leqslant x}\left(\ln\frac{x}{n}\right)^\lambda \ll x,\ x\geqslant 1$，其中≪常数和 λ 有关.

68. 证明 $\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\ln\frac{x}{n}\ll 1,\ x\geqslant 1$. [提示：利用式(7.7)和(7.8).]

69. 试证明 $\sum\limits_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]\ln p=T(x)+O(x)=x\ln x+O(x)$.

70. 试证明 $\sum\limits_{n\leqslant x}\theta\left(\frac{x}{n}\right)=T(x)+O(x)=x\ln x+O(x)$.

71. 设 $U(x)=T(x)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)+T\left(\frac{x}{30}\right)$. 试证明：

(a) $U(x)=ax+5\theta_1(\ln x+1),\ |\theta_1|\leqslant 1$，其中

$$a=\frac{7}{15}\ln 2+\frac{3}{10}\ln 3+\frac{1}{6}\ln 5=0.92129\cdots;$$

(b) $U(x)=\sum\limits_{r=1}^{\infty}c_r\,\psi\left(\frac{x}{r}\right)$，定出系数 c_r. [提示：$c_{r+30}=c_r$]；

(c) $\psi(x)\geqslant U(x)\geqslant\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)$；

(d) $ax-5(\ln x+1)\leqslant\psi(x)\leqslant\frac{6}{5}ax+(3\ln x+5)(\ln x+1),\ x\geqslant 1$;

$\left[\text{提示：}\psi(x)=\sum\limits_{n=0}^{N}\left\{\psi\left(\frac{x}{6^n}\right)-\psi\left(\frac{x}{6^{n+1}}\right)\right\},\quad N=\left[\frac{\ln x}{\ln 6}\right].\right]$

(e) $\varliminf\limits_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}\geqslant a,\quad \varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}\leqslant\frac{6}{5}a$.

72. 直接利用 § 7(3)式和(8)式证明

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}\leqslant 1\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}.$$

[提示：用反证法：若 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1-2\delta,\ \delta>0$，则考虑

$$\ln([x]!)=\sum_{1\leqslant x\leqslant n/c}\psi\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{x/c<n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right),$$

其中 c 取得使 $x\geqslant c$ 时 $\psi(x)\leqslant(1-\delta)x$，再利用第 63 题. 对下极限同样讨论.]

73. 试证明 $\sum\limits_{n\leqslant x}d(n)=x\ln x+O(x),\quad x\geqslant 1$.

$\left[\text{提示：}\sum\limits_{n\leqslant x}d(n)=\sum\limits_{k\leqslant x}\left[\frac{x}{k}\right]\text{，利用第 64 题.}\right]$

74. 设 $\zeta(\sigma)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\sigma},\ \sigma>1$. 试证明：当 $x\geqslant 1$ 时，

(a) $\sum_{n\leq x}\sigma_1(n)=\frac{\zeta(2)}{2}x^2+O(x\ln x)$, $\sigma_1(n)$由第 32 题给出;

(b) $\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+O(x^\beta)$, 其中$\sigma_\alpha(n)$由第 32 题给出, $\alpha>0$, $\alpha\neq1$, $\beta=\max(1, \alpha)$;

(c) 设 $Q(x)$表示不超过 x 的所有无平方因子数的个数,则

$$Q(x)=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\sqrt{x}).$$

[提示: $Q(x)=\sum_{n\leq x}\mu^2(n)=\sum_{n\leq x}\sum_{d^2|n}\mu(d)$.]

第　三　章

MERTENS 定 理

§1　Abel 恒等式及其应用

为了证明 Mertens 定理并定出其中的常数，我们先来证明著名的 Abel 恒等式．这是分析中的一个十分强有力的工具，本书中将经常用到．本节中有一些结果(定理 1, 7 及引理 5, 6)是为以后作准备的，本章并不需要．

引理 1(Abel 恒等式)　设 $a(n)$ 是一算术函数，其和函数

$$A(x)=\sum_{n\leqslant x}a(n)\quad(x\geqslant 1). \tag{1}$$

再设 $1\leqslant y<x$, $f(t)$ 是区间 $[y, x]$ 上的连续可微函数，则有

$$\sum_{y<n\leqslant x}a(n)f(n)=A(x)f(x)-A(y)f(y)-\int_y^x A(t)f'(t)dt. \tag{2}$$

证　注意到 $A([t])=A(t)$，有

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leqslant x}a(n)f(n)&=\sum_{n=[y]+1}^{[x]}f(n)(A(n)-A(n-1))\\&=-A([y])f([y]+1)\\&\quad-\sum_{n=[y]+1}^{[x]-1}A(n)(f(n+1)-f(n))\\&\quad+A([x])f([x])\\&=-A(y)f([y]+1)\\&\quad-\int_{[y]+1}^{[x]}A(t)f'(t)dt+A(x)f([x]).\end{aligned}$$

此外，

$$\int_y^{[y]+1} A(t)f'(t)dt = A(y)f([y]+1) - A(y)f(y),$$

$$\int_{[x]}^{x} A(t)f'(t)dt = A(x)f(x) - A(x)f([x]).$$

由以上三式即得式(2). ▮

特别地，取 $y=1$，式(2)变为

$$\sum_{n\le x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt. \tag{3}$$

作为应用，下面证明 $\theta(x)$ 和 $\pi(x)$ 的重要关系式：

定理 1 设 $x\geqslant 2$. 有

$$\theta(x) = \pi(x)\ln x - \int_2^x \pi(t)\frac{dt}{t}, \tag{4}$$

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt. \tag{5}$$

证 在引理 1 中取 $y=2$，$f(t)=\ln t$ 及 $a(n)=1$（当 $n=p$）；$a(n)=0$（其它）. 则由式(2)即得式(4). 同样，在引理 1 中取 $y=2$，$f(t)=(\ln t)^{-1}$，$a(n)=\ln p$（当 $n=p$）；$a(n)=0$（其它），则由式(2)即得式(4). ▮

由这定理可以证明第二章 §5(8)式同(9)式的等价性以及第二章 §5(11)式同(12)式的等价性（证明留给读者），但原来的证明较为初等.

如果我们知道和函数 $A(x)$ 的渐近公式，则由 Abel 恒等式(2)就可求得和式 $\sum_{y<n\le x} a(n)f(n)$ 的渐近公式.

引理 2 在引理 1 的符号和条件下，再设

$$A(t) = H(t) + r(t), \quad y\leqslant t\leqslant x, \tag{6}$$

其中 $H(t)$ 是区间 $[y, x]$ 上的连续可微函数，则有

$$(7)\qquad \sum_{y<n\leqslant x} a(n)\,f(n)=\int_y^x f(t)\,H'(t)\,dt+R(x,\ y),$$

其中

$$(8)\qquad R(x,\ y)=r(x)f(x)-r(y)f(y)-\int_y^x r(t)\,f'(t)\,dt.$$

证 由式(6)及分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_y^x A(t)f'(t)\,dt&=\int_y^x H(t)\,f'(t)\,dt+\int_y^x r(t)\,f'(t)\,dt\\&=H(x)f(x)-H(y)f(y)-\int_y^x f(t)\,H'(t)\,dt\\&\quad+\int_y^x r(t)\,f'(t)\,dt,\end{aligned}$$

由此及式(2)、(6),即得(7)式. ▌

特别是, 设 $a(n)\equiv 1$, 则 $A(x)=[x]$. 当取 $H(x)=x$ 或 $x-\dfrac{1}{2}$ 时, 由引理 2 分别可得到

$$\begin{aligned}(9)\qquad \sum_{y<n\leqslant x} f(n)=\int_y^x f(t)\,dt-(t-[t])f(t)\Big|_y^x\\+\int_y^x (t-[t])\,f'(t)\,dt,\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}(10)\qquad \sum_{y<n\leqslant x} f(n)=\int_y^x f(t)\,dt-b_1(t)f(t)\Big|_y^x\\+\int_y^x b_1(t)\,f'(t)\,dt,\end{aligned}$$

其中

$$(11)\qquad b_1(t)=t-[t]-\frac{1}{2}.$$

公式(9)和(10)通常都称为 Euler 求和公式.

下面我们来给出几个有关的应用 (本章仅需要引理 3).

引理 3

$$(12)\qquad \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\ln x+\gamma+0\left(\frac{1}{x}\right)\quad (x\geqslant 1),$$

其中

$$(13)\qquad \gamma=1-\int_1^\infty (t-[t])\frac{dt}{t^2}.$$

证　在式(9)中取 $y=1$, $f(t)=\frac{1}{t}$, 即得

$$\begin{aligned}\sum_{1<n\leqslant x}\frac{1}{n}&=\int_1^x\frac{1}{t}dt-(x-[x])\frac{1}{x}-\int_1^x(t-[t])\frac{dt}{t^2}\\&=\ln x-\int_1^\infty(t-[t])\frac{dt}{t^2}-(x-[x])\frac{1}{x}\\&\quad+\int_x^\infty(t-[t])\frac{dt}{t^2}.\end{aligned}$$

由此及

$$(14)\qquad 0<\int_x^\infty(t-[t])\frac{dt}{t^2}<\int_x^\infty\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{x},$$

即得式(12). ▌

在式(14)中取 $x=1$, 立即可看出

$$(15)\qquad 1>\gamma>0.$$

γ 通常称为 Euler 常数, 由计算知

$$\gamma=0.57721566490\cdots.$$

引理 4　设整数 $k\geqslant 1$. 当 $x\geqslant 2$ 时, 有

$$(16)\quad \sum_{n\leqslant x}\frac{(\ln n)^k}{n}=\frac{1}{k+1}(\ln x)^{k+1}+\gamma_k+O\left(\frac{(\ln x)^k}{x}\right),$$

其中

$$(17)\qquad \gamma_k=\int_1^\infty(t-[t])\frac{k(\ln t)^{k-1}-(\ln t)^k}{t^2}dt$$

证　在式(9)中取 $y=1$, $f(t)=\frac{(\ln t)^k}{t}$, 得到

$$\sum_{n\leq x}\frac{(\ln n)^k}{n}=\int_1^x\frac{(\ln t)^k}{t}dt-(x-[x])\frac{(\ln x)^k}{x}$$
$$+\int_1^x(t-[t])\ \frac{k(\ln t)^{k-1}-(\ln t)^k}{t^2}\,dt.$$

此外，
$$\int_1^x\frac{(\ln t)^k}{t}dt=\frac{1}{k+1}(\ln x)^{k+1},$$

以及当 $x\geqslant 2$ 时，
$$\int_x^\infty(t-[t])\ \frac{k(\ln t)^{k-1}-(\ln t)^k}{t^2}\ dt=O\Big(\frac{(\ln x)^k}{x}\Big).$$

由以上三式即得式(16). ▌

引理 5 设整数 $k\geqslant 1$. $x>y\geqslant 1$. 我们有

$$\sum_{y<n\leq x}\frac{1}{n}\Big(\ln\frac{n}{y}\Big)^k=\frac{1}{k+1}\Big(\ln\frac{x}{y}\Big)^{k+1}+O\Big(\frac{1}{y}\Big(\ln\frac{x}{y}\Big)^k\Big).\tag{18}$$

证 在式(9)中取 $f(t)=\frac{1}{t}\Big(\ln\frac{t}{y}\Big)^k$, 得到

$$\sum_{y<n\leq x}\frac{1}{n}\Big(\ln\frac{n}{y}\Big)^k$$
$$=\int_y^x\frac{1}{t}\Big(\ln\frac{t}{y}\Big)^k dt-\frac{x-[x]}{x}\Big(\ln\frac{x}{y}\Big)^k$$
$$+\int_y^x(t-[t])\frac{1}{t^2}\Big[k\Big(\ln\frac{t}{y}\Big)^{k-1}-\Big(\ln\frac{t}{y}\Big)^k\Big]dt.$$

注意到
$$\int_y^x\frac{1}{t}\Big(\ln\frac{t}{y}\Big)^k dt=\frac{1}{k+1}\Big(\ln\frac{x}{y}\Big)^{k+1},$$

及
$$\Big|\int_y^x(t-[t])\ \frac{1}{t^2}\Big[k\Big(\ln\frac{t}{y}\Big)^{k-1}-\Big(\ln\frac{t}{y}\Big)^k\Big]dt\Big|$$
$$\leqslant\int_y^x\frac{k}{t^2}\Big(\ln\frac{t}{y}\Big)^{k-1}dt+\int_y^x\frac{1}{t^2}\Big(\ln\frac{t}{y}\Big)^k dt$$

$$\leqslant \frac{2}{y}\left(\ln\frac{x}{y}\right)^k,$$

由以上三式即得式(18). ▮

作为最后一个应用，下面证明带余项估计的素数定理的等价形式:

定理 2 设 A 为任一正数. 以下三个命题是等价的:

(19) $$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+1}}\right)\quad (x\geqslant 2);$$

(20) $$\theta(x)=x+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A}}\right)\quad (x\geqslant 2);$$

(21) $$\psi(x)=x+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A}}\right)\quad (x\geqslant 2),$$

其中

(22) $$\mathrm{Li}x=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}\quad (x\geqslant 2).$$

证 命题(20)和(21)的等价性是第二章§5(6)式的直接推论. 下面利用定理1及引理2的方法来证明前两个命题等价. 设式(19)成立, 记

$$\pi(x)=\mathrm{Li}x+r(x),$$

$$r(x)=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+1}}\right).$$

代入式(4), 并利用分部积分, 得

$$\begin{aligned}\theta(x)&=(\mathrm{Li}\,x+r(x))\ln x-\int_2^x\mathrm{Li}t\,\frac{dt}{t}-\int_2^x r(t)\,\frac{dt}{t}\\&=\int_2^x dt+r(x)\ln x-\int_2^x r(t)\,\frac{dt}{t}\\&=x+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A}}\right)+O\left(\int_2^x\frac{dt}{(\ln t)^{A+1}}\right)\\&=x+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A}}\right),\end{aligned}$$

这就证明了(20)式成立. 反过来,若(20)式成立,则用同样的方法,利用(5)式可证明(19)式成立.】详细的推导留给读者.

这里引进了一个新的函数 $\mathrm{Li}\, x$, 称为对数积分. 不难证明:当 $x\geqslant 2$ 时,

$$(23)\quad \mathrm{Li}\, x=\frac{x}{\ln x}+\int_2^x\frac{dt}{\ln t}-\frac{2}{\ln 2}=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

一般的,对任意正整数 n, 当 $x\geqslant 2$ 时,

$$(24)\quad \mathrm{Li}\, x=\frac{x}{\ln x}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{(\ln x)^k}\right)+n!\int_2^x\frac{dt}{(\ln t)^{n+1}}+C_n$$

$$=\frac{x}{\ln x}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{(\ln x)^k}\right)+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right).$$

其中 C_n 为一个和 x 无关的常数. (证明留给读者.)

§2 Mertens 定理

下面证明 Mertens 关于素数的某种平均分布的三个重要定理——定理 1, 2, 3.

定理 1 设 $x\geqslant 1$. 我们有

$$(1)\qquad \sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\ln x+O(1);$$

$$(2)\qquad \sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1).$$

证 由第 2 章 §7(9)及(2)式可得

$$(3)\qquad \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right]=x\ln x+O(x).$$

由 Чебышев 不等式(第二章 §8(1)式)得

$$0\leqslant \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)\leqslant\psi(x)<4x.$$

由以上两式合起来即得(1)式. 由(1)式及

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}$$

$$=\sum_{m\geqslant 2}\sum_{p\leqslant x^{1/m}}\frac{\ln p}{p^m}<\sum_{p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\right)\ln p$$

$$=\sum_{p}\frac{\ln p}{p(p-1)}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n(n-1)}=O(1),$$

即可推出(2)式. ▌

应该指出, Чебышев 不等式本身亦可由第二章§7(3)式推出(见第二章§8), 所以定理1实际上是第二章§7(3)——$\psi(x)$的基本性质的推论. [第二章§7(9)是由§7(3)及§7(8)得到的].

由本节定理1及上一节引理2立即推出

定理2 设$x\geqslant 2$. 有

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+A_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{4}$$

其中A_1为一常数.

证 在§1引理2中取$a(n)=\dfrac{\ln p}{p}$ (当$n=p$); $a(n)=0$ (其它), $f(t)=\dfrac{1}{\ln t}$, $y=2$, 以及$H(t)=\ln t$. 这样由定理1知$r(t)=O(1)$, 并得到

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\sum_{2<n\leqslant x}a(n)f(n)$$

$$=\frac{1}{2}+\int_2^x\frac{dt}{t\ln t}+\frac{r(t)}{\ln t}\bigg|_2^x+\int_2^x\frac{r(t)}{t\ln^2 t}dt.$$

由于$r(2)=-\dfrac{1}{2}\ln 2$, 故得

(5)
$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+1-\ln\ln 2+\int_2^{\infty}\frac{r(t)}{t\ln^2 t}dt-\int_x^{\infty}\frac{r(t)}{t\ln^2 t}dt\,O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

取

(6)
$$A_1=1-\ln\ln 2+\int_2^{\infty}\frac{r(t)}{t\ln^2 t}dt,$$

以及由 $r(t)=O(1)$ 可得

$$\int_x^{\infty}\frac{r(t)}{t\ln^2 t}dt=O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

这样，由式(5)就推得式(4)．】

定理3 设 $x\geqslant 2$. 有

(7)
$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-A_2}}{\ln x}+O\left(\frac{1}{(\ln x)^2}\right).$$

其中 A_2 为一常数.

证 由于

$$\left|\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right|=\left|\int_1^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t}-1\right)dt\right|<\frac{1}{p(p-1)},$$

所以级数 $\sum_{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)$ 收敛，且

(8)
$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)&=A_3-\sum_{p>x}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)\\&=A_3+O\left(\sum_{p>x}\frac{1}{p(p-1)}\right)\\&=A_3+O\left(\sum_{n>x}\frac{1}{n(n-1)}\right)\\&=A_3+O\left(\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

其中

(9)
$$A_3=\sum_{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right).$$

由式(4)和(8)得

$$\ln\prod_{p<x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\sum_{p<x}\frac{1}{p}+\sum_{p<x}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)$$
$$=-\ln\ln x-A_1+A_3+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

这就证明了式(7)，且

(10) $$A_2=A_1-A_3. \quad \blacksquare$$

应该指出的是，从素数定理 $\psi(x)\sim x$ 出发，直接利用 Abel 恒等式(或§1引理2)，并不能推出 Mertens 的这三个定理，而只能得到较弱的结果(读者自己推导)．这也可看出定理1(定理2和3是它的推论)所包含的信息的深刻性．而定理1则是第二章§7(3)式的推论．所以，$\psi(x)$ 的性质(即第二章§7(3)式)具有本质的重要作用．

在下一节中，我们要指出：从定理1立即可推出 Чебышев 的重要结论：极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}$$

若存在，则必为1．而在§5中将定出这里的两个常数 A_1 与 A_2．

在结束本节之前，证明一个一般性定理，定理1是它的一个特殊情形．

定理4 设 $a(n)$ 是非负的算术函数，满足条件

(11) $$\sum_{n<x}a(n)\left[\frac{x}{n}\right]=ax\ln x+O(x)\quad(x\geqslant1),$$

则有

(12) $$\sum_{n<x}\frac{a(n)}{n}=a\ln x+O(1)\quad(x\geqslant1),$$

(13) $$\sum_{n<x}a(n)\leqslant C_1x\quad(x\geqslant1),$$

$$(14)\qquad \sum_{n\leqslant x}a(n)\geqslant C_2x\quad (x\geqslant x_0),$$

其中 C_1、C_2 是正常数，x_0 亦为一正常数。

证 显然，不妨假定 $a=1$. 首先证明(13)式，然后证明(12)式，最后证明(14)式。设

$$(15)\qquad A(x)=\sum_{n\leqslant x}a(n),\qquad S(x)=\sum_{n\leqslant x}a(n)\left[\frac{x}{n}\right].$$

利用 $a(n)\geqslant 0$ 及 $0\leqslant[2y]-2[y]\leqslant 1$，得

$$(16)\ S(x)-2S\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n\leqslant\frac{x}{2}}a(n)\left(\left[\frac{x}{n}\right]-2\left[\frac{x}{2n}\right]\right)+\sum_{\frac{x}{2}<n\leqslant x}a(n)$$
$$\geqslant A(x)-A\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0.$$

另一方面由条件(11)得

$$(17)\qquad S(x)-2S\left(\frac{x}{2}\right)=O(x).$$

这里的 O 常数和 x 无关. 设正整数 k 满足 $2^{k-1}\leqslant x<2^k$. 这样，由式(16)、(17)得

$$A(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\left(A\left(\frac{x}{2^i}\right)-A\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right)\right)\leqslant C_3\sum_{i=0}^{k-1}\frac{x}{2^i}<2C_3x,$$

其中 C_3 为一正常数. 取 $C_1=2C_3$ 就证明了(13)式.

由于

$$(18)\qquad x\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n}=\sum_{n\leqslant x}a(n)\left[\frac{x}{n}\right]+\sum_{n\leqslant x}a(n)\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right),$$

由此及式(11)、(13)就推出了(12)式.

最后来证明(14)式. 由式(12)知，存在正常数 c_4，使得

$$|r(x)|\leqslant c_4\quad (x\geqslant 1)$$

这里
$$r(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n}-\ln x.$$

取 $\lambda=e^{-(1+2c_4)}$，$x_0=\lambda^{-1}$，则当 $x\geqslant x_0$ 时，由(12)式得

$$\sum_{\lambda x<n\leqslant x}\frac{a(n)}{n}=-\ln\lambda+r(x)-r(\lambda x)\geqslant-\ln\lambda-2c_4=1,$$

因而 $\sum_{n\leqslant x}a(n)\geqslant\lambda x\sum_{\lambda x<n\leqslant x}\frac{a(n)}{n}\geqslant\lambda x\quad(x\geqslant x_0).$

取 $c_2=\lambda$ 就证明了式(14). ▌

在定理 4 中取 $a(n)=\Lambda(n)$, 则由第二章§7(9)式知条件(11)满足(事实上, 第二章§7(9)式比条件(11)要强得多). 所以式(12), (13), (14)均成立. 而(12)式就是定理 1, 式(13)和(14)就是 Чебышев 不等式.

不难证明: 在条件 $a(n)\geqslant0$ 下, 关系式(11)和(12)是等价的. 因为由式(12)可推出

$$\sum_{x<n\leqslant 2x}a(n)=O(x).$$

详细证明留给读者. 这也就是说, 定理 1 是同一个比第二章§7(9)式所给出的渐近公式弱的渐近公式

(19) $$\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right]=x\ln x+O(x)\quad(x\geqslant1)$$

等价.

§3 Чебышев 定理

定理 1

(1) $$\varliminf_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\leqslant1\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}.$$

证 在§1引理 1 中取 $a(n)=\Lambda(n)$, $f(t)=\frac{1}{t}$, 及 $y=1$, 得到

(2) $$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\frac{\psi(x)}{x}+\int_1^x\frac{\psi(t)}{t^2}dt.$$

由第二章§8(1)式、本章§2(1)式及上式，得

$$\int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt=\ln x+O(1). \tag{3}$$

下面用反证法证明(1)式左端不等式．若不然，则有 $\delta>0$，使

$$\varliminf_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1+\delta.$$

所以存在 x_0，使得 $t\geqslant x_0$ 时，

$$\psi(t)>\left(1+\frac{\delta}{2}\right)t.$$

因而当 $x>x_0$ 时，

$$\int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt>\int_{x_0}^x\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\frac{dt}{t}>\left(1+\frac{\delta}{2}\right)(\ln x-\ln x_0)$$

$$=\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\ln x+O(1),$$

而这和(3)式矛盾．▌用同样的方法可证明(1)式的右端不等式(留给读者)．

推论1 以下三个极限

$$\lim_{x\to\infty}\pi(x)\frac{\ln x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x},$$

若存在，则都必为1．

证 由定理1立即推出 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}$ 若存在，则必为1．由此及第二章§5定理3就证明另外两个极限若存在，则亦必为1．▌

§4 实变量的 ζ 函数

为了定出§2中定理2及定理3中的常数 A_1 和 A_2，需要讨论 Euler 所首先研究的实变量的 ζ 函数：

$$\zeta(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}\quad(\sigma>1). \tag{1}$$

当 $\sigma>1$ 时，式(1)中的级数显然是收敛的. 在第八章中我们将进一步研究这个函数. Euler 证明了下面的乘积公式:

引理 1 设 $\sigma>1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{\sigma}}\right)^{-1}. \tag{2}$$

证 对任意的 $x>2$, 有

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p^{\sigma}}\right)^{-1}=\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{1}{p^{\sigma}}+\frac{1}{p^{2\sigma}}+\cdots\right),$$

上式右端是有限个收敛正项级数的乘积, 所以可照通常的乘法乘出来,并按任意方式聚项. 这些项的形式为

$$\frac{1}{(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s})^{\sigma}},$$

其中每一个 α_i 可分别取 0, 1, 2, ⋯, p_1, p_2, ⋯, p_s 是不超过 x 的所有素数. 由算术基本定理(即第二章 § 2 引理 1)知,这些项是两两不相同的,所以,当 $\sigma>1$ 时,必有

$$1<\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{1}{p^{\sigma}}+\frac{1}{p^{2\sigma}}+\cdots\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}},$$

这也证明了(2)式中的无穷乘积收敛. 另一方面显然有(参看第二章 § 1 引理 4 的证明)

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{1}{p^{\sigma}}+\frac{1}{p^{2\sigma}}+\cdots\right)>\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{\sigma}}.$$

令 $x\to\infty$, 由以上各式就推出等式(2).]

下面利用 Euler 求和公式(即 § 1(10)式)来求 $\zeta(\sigma)$ 当 $\sigma\to 1_+$ 时的渐近公式.

引理 2 设 $\delta>0$, $x\geqslant 1$. 有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{1+\delta}}=\frac{1-x^{-\delta}}{\delta}+\gamma+O(\delta)+O\left(\frac{1}{x^{1+\delta}}\right), \tag{3}$$

其中 O 常数和 δ、x 无关，γ 为 Euler 常数.

证 在§1(10)式中取 $f(t)=t^{-1-\delta}$, $y=1$, 得到

$$(4)\quad \sum_{n\leq x}\frac{1}{n^{1+\delta}}=\frac{1-x^{-\delta}}{\delta}+\frac{1}{2}-(1+\delta)\int_1^x\frac{t-[t]-\frac{1}{2}}{t^{2+\delta}}dt$$

$$=\frac{1-x^{-\delta}}{\delta}+\frac{1}{2}-(1+\delta)\int_1^\infty\frac{t-[t]-\frac{1}{2}}{t^{2+\delta}}dt+O\left(\frac{1}{x^{1+\delta}}\right).$$

由于 $1-t^{-\delta}=1-e^{-\delta\ln t}\leqslant\delta\ln t,\ t\geqslant1$, 所以

$$\left|\int_1^\infty\frac{t-[t]-\frac{1}{2}}{t^2}\left(1-\frac{1}{t^\delta}\right)dt\right|\leqslant\int_1^\infty\frac{\delta\ln t}{t^2}dt=O(\delta).$$

由以上两式即得

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^{1+\delta}}=\frac{1-x^{-\delta}}{\delta}+\frac{1}{2}-\int_1^\infty\frac{t-[t]-\frac{1}{2}}{t^2}dt+O(\delta)+O\left(\frac{1}{x^{1+\delta}}\right),$$

由此及§1(13)式即得(3)式. ▌

在式(3)中令 $\delta\to0$, 即得§1(12)式. 而令 $x\to\infty$ 得到渐近公式

$$(5)\qquad \zeta(1+\delta)=\frac{1}{\delta}+\gamma+O(\delta)\quad(\delta>0).$$

由此得到 $\ln\zeta(1+\delta)$ 的渐近公式

$$(6)\qquad \ln\zeta(1+\delta)=\ln\frac{1}{\delta}+O(\delta)\quad(\delta>0).$$

但另一方面，从关系式(2)可看出，$\ln\zeta(1+\delta)$ 的主要部份应是

$$\sum_{p} \frac{1}{p^{1+\delta}},$$

而它的渐近公式可由 Abel 恒等式及 $\sum_{p<x} \frac{1}{p}$ 的渐近公式得到. 比较由这两种方法得到的渐近公式，就可定出常数 A_1.

为了求出 $\sum_{p} p^{-1-\delta}$ 的渐近公式，需要先证明 Euler 常数的一个著名的积分表示式

引理 3

$$\gamma = \int_0^{\infty} e^{-u} \ln \frac{1}{u} du. \tag{7}$$

证 利用等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1-(1-s)^n}{s} ds = \int_0^n \left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \frac{dx}{x},$$

由 § 1(12)式可得

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^n \left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \frac{dx}{x} - \int_1^n \frac{dx}{x} \right\} \tag{8}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^1 \left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \frac{dx}{x} - \int_1^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{dx}{x} \right\},$$

由熟知的不等式 $e^t \geqslant 1+t$ 可得

$$e^{-x} \geqslant \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \quad (x \leqslant n),$$

$$e^{x} \geqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad (x \geqslant -n).$$

进而，当 $|x| \leqslant n$ 时，有

$$0 \leqslant e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}\left[1-e^{x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \tag{9}$$

$$\leqslant e^{-x}\left[1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right] \leqslant \frac{1}{n} e^{-x} x^2,$$

上式最后一步用了不等式

$$1-ny\leqslant(1-y)^n \quad (0\leqslant y\leqslant 1).$$

由(9)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{dx}{x}=\int_0^1(1-e^{-x})\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^1 e^{-x}\ln\frac{1}{x}\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\frac{dx}{x}=\int_1^\infty\frac{e^{-x}}{x}\,dx=-\int_1^\infty e^{-x}\ln\frac{1}{x}\,dx.$$

由以上两式及(8)式即得式(7). ▌

引理 4 设 $\delta>0$, 有

$$\sum_p\frac{1}{p^{1+\delta}}=\ln\frac{1}{\delta}+A_1-\gamma+O\left(\delta\ln\frac{1}{\delta}\right), \tag{10}$$

其中 O 常数和 δ 无关.

证 在 Abel 恒等式(即 § 1 引理 1)中取 $f(t)=t^{-\delta}$, $y=2$, 及 $a(n)=p^{-1}$ (当 $n=p$); $a(n)=0$ (其它), 得到

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^{1+\delta}}=x^{-\delta}\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}+\delta\int_2^x t^{-\delta-1}\sum_{p\leqslant t}\frac{1}{p}\,dt.$$

由此及 § 2 定理 2 得到

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^{1+\delta}}=x^{-\delta}\ln\ln x+\delta\int_2^x t^{-\delta-1}\ln\ln t\,dt+A_1$$
$$+O\left(\frac{x^{-\delta}}{\ln x}\right)+O\left(\delta\int_2^x\frac{t^{-\delta-1}}{\ln t}\,dt\right)+O(\delta), \tag{11}$$

令 $x\to\infty$, 得

$$\sum_p\frac{1}{p^{1+\delta}} \tag{12}$$
$$=\delta\int_2^\infty t^{-\delta-1}\ln\ln t\,dt+A_1+O\left(\delta\int_2^\infty\frac{t^{-\delta-1}}{\ln t}\,dt\right).$$

由于 $$\left|\int_1^2 t^{-\delta-1}\ln\ln t\,dt\right|\leqslant\int_1^2\ln\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt=O(1)$$

所以，作变量替换 $t=e^{u/\delta}$，得

$$\delta\int_2^\infty t^{-\delta-1}\ln\ln t\,dt=\delta\int_1^\infty t^{-\delta-1}\ln\ln t\,dt+O(\delta)$$
$$=\int_0^\infty e^{-u}\ln\frac{u}{\delta}\,du+O(\delta)$$
$$=-\gamma-\ln\delta+O(\delta),$$

最后一步用了(7)式．此外，由分部积分得

$$\delta\int_2^\infty\frac{t^{-\delta-1}}{\ln t}\,dt=-\delta 2^{-\delta}\ln\ln 2+\delta^2\int_2^\infty t^{-\delta-1}\ln\ln t\,dt$$

由以上两式及(12)式即得(10)式．∎

§5 常数的确定

定理1 §2定理2中的常数

(1) $$A_1=\gamma+\sum_p\left[\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right];$$

§2定理3中的常数

(2) $$A_2=\gamma.$$

证 设 $\delta>0$，由§4引理1知

$$\ln\zeta(1+\delta)=-\sum_p\ln\left(1-\frac{1}{p^{1+\delta}}\right)$$
$$=\sum_p\frac{1}{p^{1+\delta}}-\sum_p\left[\ln\left(1-\frac{1}{p^{1+\delta}}\right)+\frac{1}{p^{1+\delta}}\right].$$

由§4(6)式和§4(10)式得

(3) $$A_1=\gamma+\sum_p\left[\ln\left(1-\frac{1}{p^{1+\delta}}\right)+\frac{1}{p^{1+\delta}}\right]+O\left(\delta\ln\frac{1}{\delta}\right).$$

由于当 $\delta\geqslant 0$ 时,

$$\left|\ln\left(1-\frac{1}{p^{1+\delta}}\right)+\frac{1}{p^{1+\delta}}\right|\leqslant\frac{1}{p^{1+\delta}(p^{1+\delta}-1)}\leqslant\frac{1}{p(p-1)},$$

所以(3)式中的级数对 $\delta\geqslant 0$ 一致收敛, 因而对 (3) 式取极限 $\delta\to 0_+$, 即得(1)式. 由(1)式及§2(9)式, §2(10)式即得(2)式. ▮

由数值计算知

$$A_1=0.26149721\cdots,$$

$$\sum_p\left[\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right]=-0.31571845\cdots.$$

在结束本章的时候, 我们应指出这样一个事实: 在 Mertens 的第一个定理中, 所得到的渐近公式没有定出常数项. 那末能否证明

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\ln x+A_4+o(1) \tag{4}$$

呢? 可以证明上式和素数定理是等价的, 且 $A_4=-\gamma$. 这是下一章的内容之一.

第三章习题

1. 由等式 $\sum_{y<n\leqslant x}a(n)f(n)=\sum_{y<n\leqslant x}a(n)\left(f(x)-\int_n^x f'(t)dt\right)$出发, 用交换求和号与积分号的方法证明§1引理1.
2. 若素数定理成立, 则有:

   (a) $\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\sim\ln\ln x$; (b) $\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}\sim\ln x$.

   [提示: 利用§1引理3].
3. 设 $k\geqslant 1$. 证明当 $x\geqslant 2$ 时, 有

   $$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)(\ln n)^k=\psi(x)(\ln x)^k+O(kx(\ln x)^{k-1}),$$

   其中 O 常数和 k 无关.
4. 设 $0<\lambda<1$. 证明以下三个命题是等价的:

(a) $\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O(x\exp(-c_1(\ln x)^\lambda))$;

(b) $\theta(x)=x+O(x\exp(-c_2(\ln x)^\lambda))$;

(c) $\psi(x)=x+O(x\exp(-c_3(\ln x)^\lambda))$,

其中 c_1, c_2, c_3 为正常数.

5. 设 $\psi_1(x)=x-\gamma-1$, γ 为 Euler 常数. 试证明

$$T_1(x)=\sum_{n\leqslant x}\psi_1\left(\frac{x}{n}\right)=x\ln x-x+O(1).$$

由此推出存在正常数 A, 使得 $\psi(x)\leqslant Ax$.

$\left[\text{提示: 利用 } \psi(x)-\psi_1(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left(T\left(\frac{x}{n}\right)-T_1\left(\frac{x}{x}\right)\right).\right]$

6. 设 m 为正整数, $c_m=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m$. 试证明:

(a) $c_m>0$;

(b) $0<c_m-c_{m+1}<\frac{1}{m^2}$;

(c) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{1}{n}-\ln x\right)$ 存在;

(d) § 1(12)式成立.

7. 设整数 $k\geqslant 1$. 试证明: 当 $x\geqslant 1$ 时, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln^k n}{n}\ln\frac{x}{n}=\frac{(\ln x)^{k+2}}{(k+1)(k+2)}+\gamma_k\ln x+\delta_k+O\left(\frac{\ln^k x}{x}\right),$$

其中 γ_k 由 § 1(17)式给出, δ_k 为一常数.

8. 求 $\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}$ 的渐近公式.

9. 证明 § 1 中的(23)式及(24)式.

10. 设 $a(n)$是非负算术函数. 试证明 § 2(11)及 § 2(12)等价.

11. 若当 $x\geqslant 2$ 时, 有

$$\sum_{p\leqslant x}f(p)\ln p=(ax+b)\ln x+cx+O(1),$$

则存在常数 A, 使当 $x\geqslant 2$ 时, 有

$$\sum_{p\leqslant x}f(p)=ax+(a+c)\left(\frac{x}{\ln x}+\int_2^x\frac{dt}{\ln^2 t}\right)$$
$$+b\ln\ln x+A+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

12. 设 $S(x)(x\geqslant 1)$是实值函数, $Q(x)$是它的广义 Möbius 变换. 试证

明：若 $S(x)\sim cx$，$x\to+\infty$，c 为一正常数，则 $Q(x)\sim cx\ln x$，$x\to+\infty$.

13. 证明 $\sum\limits_{p>x}\dfrac{1}{p\ln p}=O\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$，$x\geqslant 2$.

14. 证明 $\sum\limits_{p>x}\dfrac{1}{p^2}=O\left(\dfrac{1}{x\ln x}\right)$，$x\geqslant 2$.

15. 试证明存在常数 c，使当 $x>2$ 时，有

$$\prod_{2<p\leqslant x}\left(1-\frac{2}{p}\right)=\frac{c}{\ln^2 x}+O\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right).$$

16. 试证明：当整数 $N\geqslant 4$ 时，有

$$\sum_{p\mid N}\frac{\ln p}{p}=O(\ln\ln N).$$

[提示：N 的素因子个数等于 $O(\ln N)$．]

17. 试证明：当 $\sigma>1$ 时，有：

(a) $\dfrac{1}{\zeta(\sigma)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mu(\sigma)}{n^\sigma}$；　　(b) $\zeta^2(\sigma)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{d(n)}{n^\sigma}$；

(c) $-\dfrac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\Lambda(n)}{n^\sigma}$.

第 四 章*

素数定理的等价命题

素数定理有许多等价命题，我们将证明以下三个命题与素数定理 $\psi(x)\sim x$ 等价：

(A) $$M(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=o(x)\quad(x\to\infty),$$

(B) $$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}=o(1)\quad(x\to\infty),$$

(C) $$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\ln x-\gamma+o(1)\quad(x\to\infty).$$

§1 命题(A)与素数定理等价

引理1 设

(1) $$H(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\ln n\quad(x\geqslant 1).$$

则命题(A)与命题

(2) $$H(x)=o(x\ln x)$$

等价.

证 由 Abel 恒等式(即第三章§1引理1)易得

(3) $$\begin{aligned}H(x)&=M(x)\ \ln x-\int_1^x\frac{M(t)}{t}\,dt\\&=M(x)\ln x+O(x),\end{aligned}$$

最后一步用了显然估计 $|M(t)|\leqslant t,\ t\geqslant 1$. 由式(3)立即推出引理成立. ∎

下面证明:

定理 1 若素数定理成立,则命题(A)成立.

证 由引理1知只要证明式(2)成立. 由第二章§6(6)式,可得

$$(4)\qquad -H(x)=\sum_{n<x}\sum_{d\mid n}\mu(d)\Lambda\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d<x}\mu(d)\sum_{\substack{n<x\\ d\mid n}}\Lambda\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$=\sum_{d<x}\mu(d)\psi\left(\frac{x}{d}\right),$$

这表明 $\psi(x)$是 $-H(x)$的广义 Möbius 变换. 设

$$(5)\qquad \psi(x)=x(1+r(x)).$$

若素数定理成立,则

$$(6)\qquad \bar{r}(x)=\sup_{y\geqslant x}|r(y)|=o(1)\qquad (x\to\infty).$$

显见 $\bar{r}(x)$是正的递减函数. 由式(4)和(5)得

$$(7)\qquad -H(x)=\sum_{d<x}\mu(d)\frac{x}{d}+\sum_{d<x}\mu(d)\frac{x}{d}r\left(\frac{x}{d}\right).$$

利用第二章§6(9)式,得到

$$(8)\qquad \sum_{d<x}\mu(d)\frac{x}{d}=1+\sum_{d<x}\mu(d)\left(\frac{x}{d}-\left[\frac{x}{d}\right]\right)=O(x).$$

对任意正数 $A>1$,有

$$(9)\qquad \left|\sum_{d<x}\mu(d)\frac{x}{d}r\left(\frac{x}{d}\right)\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{d<x/A}\mu(d)\frac{x}{d}r\left(\frac{x}{d}\right)\right|+\left|\sum_{x/A<d<x}\mu(d)\frac{x}{d}r\left(\frac{x}{d}\right)\right|$$

$$\ll\bar{r}(A)x\ln x+Ax.$$

由以上三式可推出:对任意正数 A,有

$$\varlimsup_{x\to\infty}\left|\frac{H(x)}{x\ln x}\right|\ll\bar{r}(A).$$

由此及(6)式即得(2)式. ∎

为了由命题(*A*)推出素数定理,先要证明一个引理.

引理 2 设 $d(n)$是除数函数,则有

$$\sum_{n\leqslant x} d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}),\ (x\geqslant 1), \tag{10}$$

其中 γ 为 Euler 常数.

证 由

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} d(n) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{k\mid n} 1=\sum_{kl\leqslant x} 1\\ &=\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\sum_{l\leqslant x/k} 1+\sum_{l\leqslant\sqrt{x}}\sum_{k\leqslant x/l} 1-\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\sum_{l\leqslant\sqrt{x}} 1\\ &=\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x}{k}\right]+\sum_{l\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x}{l}\right]-[\sqrt{x}]^2\\ &=2x\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{k}-x+O(\sqrt{x}),\end{aligned}$$

由此及第三章 § 1(12)式就推得式(10). ▌

附注 这里用的求和方法通常称为双曲型求和法. 它适用于求如下型式的二重和:

$$\sum_{kl\leqslant x} f(k)g(l). \tag{11}$$

它把变数 $k,\ l$ 看作平面上的整点,一般把区域 $1\leqslant kl\leqslant x$ 中的整点作这样的分划: 设 $x=yz,\ y\geqslant 1,\ z\geqslant 1$. 一部份为 $1\leqslant k\leqslant y,\ 1\leqslant l\leqslant x/k$; 一部份为 $1\leqslant l\leqslant z,\ 1\leqslant k\leqslant x/l$, 但还要减去它们重复的一部份: $1\leqslant k\leqslant y,\ 1\leqslant l\leqslant z$, 即

$$\begin{aligned}\sum_{kl\leqslant x} f(k)g(l)=&\sum_{1\leqslant k\leqslant y} f(k)\sum_{1\leqslant l\leqslant\frac{x}{k}} g(l)\\ &+\sum_{1\leqslant l\leqslant z} g(l)\sum_{1\leqslant k\leqslant\frac{x}{l}} f(k)\\ &-\sum_{1\leqslant k\leqslant y} f(k)\sum_{1\leqslant l\leqslant z} g(l).\end{aligned} \tag{12}$$

在引理 2 中取的是 $y=z=\sqrt{x}$. 这种求和方法在下面还要用到.

定理2 若命题(A)成立，则素数定理成立.

证 首先求$\psi(x)-[x]$的广义 Möbius 变换. 由第二章§7(3)式及

$$\sum_{n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right]=\sum_{n\leqslant x}\sum_{k\leqslant\frac{x}{n}}1=\sum_{m\leqslant x}\sum_{n\mid m}1=\sum_{m\leqslant x}d(m)$$

可得

$$\sum_{n\leqslant x}\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\left[\frac{x}{n}\right]\right)=\sum_{n\leqslant x}(\ln n-d(n))$$

$$=-2\gamma x+O(\sqrt{x}),$$

最后一步用到了第二章§7(8)式及(10)式. 因此得到

$$\sum_{n\leqslant x}\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\left[\frac{x}{n}\right]+2\gamma\right)=\sum_{n\leqslant x}(\ln n-d(n)+2\gamma) \tag{13}$$

$$=O(\sqrt{x}).$$

设 $b(n)=\ln n-d(n)+2\gamma$,

$$B(x)=\sum_{n\leqslant x}b(n)=O(\sqrt{x}). \tag{14}$$

由式 (13) 及广义 Möbius 反转公式 (即第二章§6(3) 式). 得

$$\psi(x)-[x]+2\gamma=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)B\left(\frac{x}{n}\right) \tag{15}$$

$$=\sum_{nm\leqslant x}\mu(n)b(m).$$

再利用双曲型求和法来计算右端的和式. 设 $x=yz$, $y\geqslant 1$, $z\geqslant 1$, 以及

$$r(u)=\sup_{t\geqslant u}\frac{|M(t)|}{t}. \tag{16}$$

当命题(A)成立时,

$$r(u)\to 0\quad(u\to\infty). \tag{17}$$

这样，由式(12)得

$$\sum_{nm\leq x}\mu(n)b(m)$$
$$=\sum_{n\leq y}\mu(n)B\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{m\leq z}b(m)M\left(\frac{x}{m}\right)-M(y)B(z)$$
$$\ll\sum_{n\leq y}\sqrt{\frac{x}{n}}+r(y)x\sum_{m\leq z}\frac{|b(m)|}{m}+\sqrt{z}\,o(y).$$
这里用了(14)式及(16)式．由此及(15)式，并利用 $x=yz$，得
$$\psi(x)-[x]+2\gamma$$
$$\ll\frac{x}{\sqrt{z}}+r\left(\frac{x}{z}\right)x\sum_{m\leq z}\frac{|b(m)|}{m}+o\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right).$$
对任意固定的 $z\geqslant1$，由(17)式得
$$\varlimsup_{x\to\infty}\left|\frac{\psi(x)-[x]+2\gamma}{x}\right|\ll\frac{1}{\sqrt{z}}.$$
由于 z 的任意性，即推出了素数定理．∎

这样，由定理 1 和定理 2 就证明了命题 (A) 和素数定理的等价性．

§2　命题(A)与命题(B)等价

本节要证明命题(B)与(A)是等价的，因而由上节结果知它亦与素数定理等价．

定理 1　若命题(B)成立，则命题(A)亦成立．

证　由 Abel 恒等式(即第三章 §1 引理 1)易得

$$M(x)=x\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}-\int_1^x\sum_{n\leq t}\frac{\mu(n)}{n}\,dt. \tag{1}$$

若命题(B)成立，则由上式得到
$$M(x)=o(x)-\int_1^x o(1)\,dt=o(x)$$
(请读者把上式最后一步加以严格证明)，即命题(A)成立．∎

定理 2 若命题(A)成立，则命题(B)成立.

证 由第二章§6(9)式，可得

$$x\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)+1. \tag{2}$$

下面证明

$$\Delta_1=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)=o(x). \tag{3}$$

设 $b(t)=t-[t]$，$\delta(0<\delta<1)$为任一正数，有

$$\begin{aligned}\Delta_1&=\sum_{n\leqslant\delta x}\mu(n)b\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{\delta x<n\leqslant x}\mu(n)b\left(\frac{x}{n}\right)\\&=O(\delta x)+\sum_{\delta x<n\leqslant x}(M(n)-M(n-1))b\left(\frac{x}{n}\right)\\&=O(\delta x)-M([\delta x])b\left(\frac{x}{[\delta x]+1}\right)\\&\quad+\sum_{\delta x<n\leqslant[x]-1}M(n)\left(b\left(\frac{x}{n}\right)-b\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)\\&\quad+M([x])b\left(\frac{x}{[x]}\right)\\&\ll\delta x+xr([\delta x])\sum_{\delta x<n\leqslant[x]-1}\left|b\left(\frac{x}{n}\right)-b\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|+1,\end{aligned}$$

这里 $r(u)$由§1(16)式给出，并用到了 $b\left(\frac{x}{[x]}\right)\leqslant\frac{1}{[x]}$. 由于

$$\begin{aligned}\sum_{\delta x<n\leqslant[x]-1}\left|b\left(\frac{x}{n}\right)-b\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|&\leqslant\sum_{\delta x<n\leqslant[x]-1}\left(\frac{x}{n}-\frac{x}{n+1}\right)\\&\quad+\sum_{\delta x<n\leqslant[x]-1}\left(\left[\frac{x}{n}\right]-\left[\frac{x}{n+1}\right]\right)\ll\delta^{-1}.\end{aligned}$$

所以从以上两式推出

$$\frac{|\Delta_1|}{x}\ll\delta+\frac{1}{\delta}r([\delta x])+\frac{1}{x}.$$

因而从命题(A)成立可推出：

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{|\Delta_1|}{x}\ll\delta,$$

由 δ 的任意性，即得(3)式．由(3)式及(2)式就证明了命题(B)成立．∎

§3 命题(C)与素数定理等价

定理 1 若命题(C)成立，则素数定理亦成立.

证 在第三章 §1 引理 2 中取 $a(n)=\frac{\Lambda(n)}{n}$, $f(t)=t, y=1$, 及 $H(t)=\ln t-\gamma$, 再设

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\ln x-\gamma+r(x).$$

得到

$$\psi(x)=x-1+xr(x)-\gamma-\int_1^x r(t)dt.$$

当命题(C)成立时，$r(x)=o(1)$，故由上式即得

$$\psi(x)=x+o(x),$$

这就证明了素数定理．∎

定理 2 若素数定理成立，则命题(C)亦成立.

证 由

$$(1)\qquad \sum_{n\leq x}\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\left[\frac{x}{n}\right]+2\gamma\right)$$
$$=\sum_{n\leq x}\left\{\sum_{m\leq x/n}(\Lambda(m)-1)+2\gamma\right\}$$
$$=\sum_{n\leq x}\sum_{m\leq x/n}\left(\Lambda(m)-1+2\gamma\left[\frac{1}{m}\right]\right)$$
$$=\sum_{m\leq x}\left(\Lambda(m)-1+2\gamma\left[\frac{1}{m}\right]\right)\left[\frac{x}{m}\right].$$

设 $a(m)=\Lambda(m)-1+2\gamma\left[\frac{1}{m}\right]$．$b(t)=t-[t]$．下面证明：当

素数定理成立时，必有

(2) $$\Delta_2=\sum_{m\leqslant x}a(m)b\left(\frac{x}{m}\right)=o(x).$$

当素数定理成立时，必有

(3) $$A(x)=\sum_{m\leqslant x}a(m)=o(x).$$

此外，由 Чебышев 不等式知

(4) $$\sum_{m\leqslant x}|a(m)|\ll x.$$

以下推导和§2定理2中估计 Δ_1 完全一样．这里只是以 $a(m)$ 代替那里的 $\mu(n)$．而为了估计 Δ_1 仅要用到 $M(x)=o(x)$ 及 $\sum_{m\leqslant x}|\mu(n)|\ll x$，在这里由(3)式及(4)式知亦满足．所以(2)式必成立．

由式(2)、(1)及§1(13)式即得

$$\sum_{m\leqslant x}\left(\Delta(m)-1+2\gamma\left[\frac{1}{m}\right]\right)\frac{x}{m}$$
$$=\Delta_2+\sum_{n\leqslant x}\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\left[\frac{x}{n}\right]+2\gamma\right)=o(x).$$

由此推得

(5) $$\sum_{m\leqslant x}\frac{\Delta(m)-1}{m}=-2\gamma+o(1).$$

进而由上式及第三章§1(12)式就推出命题(C)成立．】

素数定理的这些非明显的等价命题表明，我们有可能给出素数定理的各种各样的不同的证明．

第四章习题

1．设 $x\geqslant 2$．试证明：存在常数 c，使得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n}=\frac{1}{2}\ln^2 x+2\gamma\ln x+c+O(x^{-\frac{1}{2}}\ln x).$$

2．试证明：当 $x\geqslant 1$ 时，有

$$\sum_{n\leqslant x}\left\{\frac{x}{n}\right\}=(1-\gamma)x+O(\sqrt{x}).$$

$\left[\text{提示:}\quad \sum_{n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right]=\sum_{n\leqslant x}d(n)\right].$

3. 设 $\Omega(n)$ 表示 n 的全部素因子个数(如 $\Omega(2)=1,\ \Omega(4)=2,\ \Omega(6)=2$), $\Omega(1)=0$). 定义 Liouville 函数 $\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$. 试证明:

(a) $\lambda(n)$ 是完全可乘函数;

(b) 设 $h(n)=\sum_{d|n}\lambda(d)$, 则当 $n=m^2$ 时, $h(n)=1$; 当 $n\neq m^2$ 时, $h(n)=0$.

4. 若 f、g 为可乘函数, 则 $\sum_{d^2|n}f(d)g\left(\frac{n}{d^2}\right)$ 亦是可乘函数. 由此证明 $\mu(n)=\sum_{d^2|n}\mu(d)\lambda\left(\frac{n}{d^2}\right)$.

5. 试证明命题 $(A)M(x)=o(x)$ 和命题 $(D)L(x)=\sum_{n\leqslant x}\lambda(x)=o(x)$ 等价. [提示: 由命题 $(A)\Rightarrow$ 命题 (D) 时, 利用第 3 题 (b) 推出的

$$\lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\,h\left(\frac{n}{d}\right),$$

及在双曲型求和法(即 § 1(12)式)中取 $g(n)=\mu(n)$, $f(n)=h(n)$. $y=x^{2/3}$, $z=x^{1/3}$; 而由命题 $(D)\Rightarrow$ 命题 (A) 时, 利用第 4 题可得

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\mu(d)\sum_{k\leqslant x/d^2}\lambda(k)=\sum_{d\leqslant x^{1/3}}\mu(d)\sum_{k\leqslant x/d^2}\lambda(k)+o(x)\Bigg].$$

6. 试证明 $\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\frac{\psi(x)}{x}+\int_1^x\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt$.

7. 试证明: 素数定理等价于积分 $\int_1^\infty\frac{\psi(t)-t}{t^2}\,dt$ 收敛. 这积分若收敛必等于 $-\gamma-1$.

第 五 章

第一个证明

1949 年 A. Selberg 和 P. Erdös 首先不用复变函数论知识而仅用初等微积分给出了素数定理的第一个真正的初等证明．下面就给出经过简化了的 Selberg-Erdös 的证明．

§1 证明的想法

首先谈谈这个证明的想法．在第二章 §7 中曾经证明了 $\psi(x)$ 的广义 Möbius 变换 $T(x)$ 等于 $\ln([x]!)$，且有渐近公式（见第二章 §7(3)式和(9)式），当 $x\geqslant 1$ 时，有

$$(1)\qquad \sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=T(x)=\ln([x]!)$$
$$=x\ln x-x+O(\ln x).$$

如果有一个相当简单的函数 $\psi_1(x)$，它的广义 Möbius 变换 $T_1(x)$ 的主要部份亦为 $x\ln x-x$，则就有理由期望 $\psi_1(x)$ 也是 $\psi(x)$ 的主要部份．由第三章 §1 引理 3 知，我们可取

$$(2)\qquad \psi_1(x)=x-\gamma-1,$$

这样，当 $x\geqslant 1$ 时，有

$$(3)\qquad \sum_{n\leqslant x}\psi_1\left(\frac{x}{n}\right)=T_1(x)=\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{x}{n}-\gamma-1\right)$$
$$=x\ln x-x+O(1).$$

由(1)式和(3)式相减，得：当 $x\geqslant 1$ 时，有

(4) $$T(x)-T_1(x)=\sum_{n\leqslant x}\left\{\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\psi_1\left(\frac{x}{n}\right)\right\}=O(\ln x).$$

这表明差 $\psi(x)-\psi_1(x)=\psi(x)-(x-\gamma-1)$ 平均起来是很小的. 关于这个差本身，利用广义 Möbius 反转公式(即第二章§6 引理 3)我们由(4)式仅能得到

(5) $$\psi(x)-\psi_1(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left\{T\left(\frac{x}{n}\right)-T_1\left(\frac{x}{n}\right)\right\}$$
$$\ll\sum_{n\leqslant x}\ln\frac{x}{n}\ll\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ll x.$$

这实际上就是早已证明的 Чебышев 不等式(这里又给出了一个证明).

但另一方面,对任给的正整数 l, 当用 $(T(x)-T_1(x))\ln^l x$ 去代替 $T(x)-T_1(x)$时, 仍然有估计:

(6) $$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left\{T\left(\frac{x}{n}\right)-T_1\left(\frac{x}{n}\right)\right\}\left(\ln\frac{x}{n}\right)^l$$
$$\ll\sum_{n\leqslant x}\left(\ln\frac{x}{n}\right)^{l+1}\ll\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ll x.$$

我们可以期望: 以 $(T(x)-T_1(x))\ln^l x$ 为其广义 Möbius 变换的函数应该和 $(\psi(x)-\psi_1(x))\ln^l x$ 差不多. 如果真是这样的话, 由式(6)就立即推出素数定理. 这就是 Selberg 的想法. 他考虑了 $l=1$ 的情形,得到了著名的 Selberg 不等式(见下节的定理 1), 为素数定理的证明奠定了基础. E. Bombieri 考虑了一般情形, 推广了 Selberg 不等式, 证明了对任意正数 A, 有

$$\psi(x)=x+O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right).$$

这将在第七章中再作简单的讨论.

§2 Selberg 不等式

Selberg 不等式最简单的证明是由 Tatuzawa 和 Iseki ([1])给出的. 他们证明了以下的一般结果:

引理 1 设 $F(x)$、$G(x)$ 是定义在 $x\geqslant 1$ 上的函数, $F(1)=G(1)$. 若

$$G(x)=\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)\quad(x\geqslant 1),\tag{1}$$

则当 $x\geqslant 1$ 时, 有

$$F(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)F\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)G\left(\frac{x}{n}\right)\ln\frac{x}{n}.\tag{2}$$

反过来, 若式(2)成立, 则式(1)亦成立.

证 若式(1)成立, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)G\left(\frac{x}{n}\right)\ln\frac{x}{n}&=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\ln\frac{x}{n}\sum_{m\leqslant x/n}F\left(\frac{x}{mn}\right)\\&=\sum_{k\leqslant x}F\left(\frac{x}{k}\right)\sum_{n\mid k}\mu(n)\ln\frac{x}{n}\\&=\ln x\sum_{k\leqslant x}F\left(\frac{x}{k}\right)\sum_{n\mid k}\mu(n)\\&\quad-\sum_{k\leqslant x}F\left(\frac{x}{k}\right)\sum_{n\mid k}\mu(n)\ln n,\end{aligned}$$

利用第二章§3(6)式及第二章§6(5)式, 由此即得(2)式.

反过来, 若(2)式成立, 则由广义 Möbius 反转公式(第二章§6 引理 3), 可得

$$\begin{aligned}G(x)\ln x&=\sum_{n\leqslant x}\left\{F\left(\frac{x}{n}\right)\ln\frac{x}{n}+\sum_{m\leqslant x/n}\Lambda(m)F\left(\frac{x}{mn}\right)\right\}\\&=\ln x\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)-\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)\ln n\end{aligned}$$

$$+\sum_{k<x}F\left(\frac{x}{k}\right)\sum_{m|k}\Lambda(m),$$

由此及第二章§6(4)式即得

$$G(x)\ln x=\ln x\sum_{n<x}F\left(\frac{x}{n}\right)\quad(x\geqslant 1).$$

注意到 $G(1)=F(1)$, 这就证明了式(1). ∎

这结果表明：以 $G(x)\ln x$ 为其广义 Möbius 变换的函数不是 $F(x)\ln x$, 而还要多出一项

$$\sum_{n<x}\Lambda(n)F\left(\frac{x}{n}\right).$$

下面证明 Selberg 不等式.

定理 1 对 $x\geqslant 1$, 有

$$(\psi(x)-x)\ln x+\sum_{n<x}\Lambda(n)\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right)=O(x). \tag{3}$$

证 在引理1中取 $F(x)=\psi(x)-(x-\gamma-1)$, 由§1(4)式知, $G(x)=T(x)-T_1(x)$. 这样由引理1和估计式§1(6) $(l=1)$ 得到

$$(\psi(x)-(x-\gamma-1))\ln x$$
$$+\sum_{n<x}\Lambda(n)\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\left(\frac{x}{n}-\gamma-1\right)\right)\ll x,$$

由此及 Чебышев 不等式即得式(3). ∎

利用 Merterns 定理(第三章§2定理1), 由(3)式得

$$\psi(x)\ln x+\sum_{n<x}\Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)=2x\ln x+O(x). \tag{4}$$

下面证明 Selberg 不等式的另一等价形式：

定理 2 对 $x\geqslant 1$ 有

$$\sum_{n<x}\Lambda_2(n)=2x\ln x+O(x), \tag{5}$$

其中

(6) $$\Lambda_2(n)=\Lambda(n)\ln n+\sum_{jk=n}\Lambda(j)\Lambda(k)\geqslant 0.$$

证　用 $\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$ 代入(4)式得

(7) $$\begin{aligned}2x\ln x+O(x)&=\ln x\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)+\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\sum_{m\leqslant x/n}\Lambda(m)\\&=\ln x\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)+\sum_{k\leqslant x}\Big(\sum_{mn=k}\Lambda(m)\Lambda(n)\Big).\end{aligned}$$

此外，由 Abel 恒等式(第三章 § 1 引理 1)易得

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\ln n=\psi(x)\ln x-\int_1^x\frac{\psi(t)}{t}\,dt$$

(8) $$=\psi(x)\ln x+O(x),$$

最后一步用到了 Чебышев 不等式．由以上两式即得(5)式．∎

利用第二章 § 7(8)式，(5)式可写为

(9) $$\sum_{n\leqslant x}(\Lambda_2(n)-2\ln n)=O(x).$$

这表明 $\Lambda_2(n)$ 和 $2\ln n$ 差不多．

由于多出了一项

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right),$$

从 Selberg 不等式 (3)，并不能立即推出素数定理．那么，Selberg 不等式究竟给了我们什么讯息呢？

为简单起见，设误差项

(10) $$\begin{cases}R(x)=\psi(x)-x, & x\geqslant 2;\\ 0, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$$

这样，素数定理就等价于证明：

(11) $$\lim_{x\to\infty}\frac{R(x)}{x}=0.$$

由 Mertens 素数定理(第三章 § 2 定理 1)

$$\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\ln x+O(1)\quad(x\geqslant 1), \tag{12}$$

可得

$$\sum_{\frac{x}{2}<n\leqslant x}\Lambda(n)\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right)=-x\sum_{\frac{x}{2}<n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}$$

$$=O(x).$$

所以 Selberg 不等式(3)可写为

$$R(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)R\left(\frac{x}{n}\right)\ll x, \tag{13}$$

或(由于 $R(y)=0,\ 0\leqslant y<1$)

$$R(x)\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)R\left(\frac{x}{n}\right)\ll x. \tag{13'}$$

定理 3 对 $x\geqslant 2$ 有

$$\frac{|R(x)|}{x}\leqslant\frac{1}{(\ln x)^2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda_2(n)}{n}\frac{\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{\frac{x}{n}} \tag{14}$$

$$+O((\ln x)^{-1}).$$

证 以 $Z(x)$ 记(13)式的左端. 有

$$Z(x)\ln x-\sum_{n<x}\Lambda(n)Z\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$=R(x)\ln^2 x+\ln x\sum_{n<x}\Lambda(n)R\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$-\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)R\left(\frac{x}{n}\right)\ln\frac{x}{n}$$

$$-\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\sum_{m<\frac{x}{n}}\Lambda(m)R\left(\frac{x}{mn}\right)$$

$$=R(x)\ln^2 x$$

$$+\sum_{k<x}\left(\Lambda(k)\ln k-\sum_{mn=k}\Lambda(m)\Lambda(n)\right)R\left(\frac{x}{k}\right)$$

而由(13)式及(12)式可得

$$Z(x)\ln x-\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)Z\left(\frac{x}{n}\right)\ll x\ln x+x\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}$$
$$\ll x\ln x.$$

因此,

$$R(x)\ln^2 x=-\sum_{k\leqslant x}\Big(\Lambda(k)\ln k-\sum_{mn=k}\Lambda(m)\Lambda(n)\Big)R\left(\frac{x}{k}\right)+O(x\ln x).$$

两边取绝对值并利用式(6)得到

$$(15)\qquad |R(x)|\ln^2 x\leqslant\sum_{k\leqslant x}\Lambda_2(k)\left|R\left(\frac{x}{k}\right)\right|+O(x\ln x).$$

这就证明了式(14). ▌

由式(5)及第三章§1引理2容易证明(留给读者):

$$(16)\qquad \frac{1}{(\ln x)^2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda_2(n)}{n}=1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\quad(x\geqslant 2).$$

这样,大体说来,不等式(14)的右端的和式是$|R(x)|/x$的一种加权平均和,而不等式(14)表明正值函数$|R(x)|/x$不大于它在自变量不超过x的值:

$$x,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{3},\ \cdots,\ \frac{x}{[x]}$$

上的值的一个加权平均和. 从直观上看,这种函数应该是不断减小到零的. 通过细致的分析学上的讨论,Erdös 首先证明了这一点,为完成素数定理的初等证明作出了贡献.

应该指出,由 Selberg 不等式(取(13)式的形式)本身可以得到

$$(17)\qquad \frac{|R(x)|}{x}\leqslant\frac{1}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\frac{\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{\frac{x}{n}}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

由于(12)式，这结果和(14)式有类似的意义，不同的只是把权 $\frac{\Lambda_2(n)}{n}$ 换为 $\frac{\Lambda(n)}{n}$. 但这二者之间的一个重要差别是：对于 $\Lambda_2(n)$本身我们有渐近公式(5)，而对于 $\Lambda(n)$ 本身的相应的渐近公式正是我们所要证明的素数定理. 正是由于对 $\Lambda_2(n)$ 本身有渐近公式(5)，才使我们有可能从(14)式证明(11)式，即素数定理.

还有，由于取了绝对值，(14)式比 Selberg 不等式本身所包含的讯息减弱了很多. 因而也就存在着利用 Selberg 不等式，作更细致的讨论来得到对余项 $R(x)$的阶的更精确的估计的可能性. 在第六章中要作这方面的讨论.

最后，$R(x)$是一个逐段连续函数，讨论起来比较麻烦. 数学上的一个重要方法就是所谓"光滑化"方法，即先把这个不连续函数转化(通常是通过各种类型的积分)为足够次可微的函数来处理，然后回过来对原有的函数推出所要的结果. 这样的讨论往往会变得简洁些. 在这里，我们将引进函数

$$S(x)=\int_2^x \frac{R(t)}{t}\,dt \quad (x\geqslant 0). \tag{18}$$

关于直接利用 $R(x)$的素数定理的证明，可参看华罗庚：[2]第九章 § 7; 闵嗣鹤：[1]第一篇第三章; Hardy 和 Wright [1] § § 22.14～22.16.

§ 3　问题的转化

由上节(18)式所定义的函数 $S(x)$显然具有以下的性质：

引理 1　$S(x)$是定义在 $x\geqslant 0$ 上的逐段连续可微函数，

$$S(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 2) \tag{1}$$

以及存在正常数 c_1，使得

(2) $$|S(x_2)-S(x_1)|\leqslant c_1|x_2-x_1| \quad (x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0).$$

特别地

(3) $$|S(x)|\leqslant c_1 x \quad (x\geqslant 0).$$

证 由 Чебышев 不等式知，存在正数 c_1，使得

(4) $$|R(t)|\leqslant c_1 t \quad (t\geqslant 0).$$

由此，从 §2(18) 式即得(2)式. 在(2)式中取 $x_1=0$ 即得式(3). 其他的结论是显然的. ∎

下面证明由函数 $S(x)$ 来表述的素数定理的等价形式：

定理 1 §2 中命题(11)式与命题

(5) $$\lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{x}=0$$

等价.

这是一个经典的 Tauber 型定理*) 的直接推论. 下面先证明这个 Tauber 型定理.

引理 2 设 $f(u)$ 是定义在 $u\geqslant u_0$ 上的实函数，在任意区间 $[u_0, x]$ 上可积，且 $uf(u)$ 是递增函数. 那末，若

(6) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{u_0}^{x}f(u)\,du=a, \quad 则$$

(7) $$\lim_{x\to\infty}f(x)=a.$$

证 设 δ $(0<\delta<1)$ 是任给的正数. 由 $uf(u)$ 的递增性知，当 $x\geqslant u_0$ 时，

$$xf(x)\frac{\delta}{\log(1+\delta)}\leqslant\int_{x}^{(1+\delta)x}f(u)\,du$$
$$\leqslant(1+\delta)xf((1+\delta)x)\log(1+\delta).$$

---

*) 关于 Tauber 型定理，在第九章中还要作更多的讨论.

而由条件(6)知

$$\int_x^{(1+\delta)x} f(u)du = a\delta x + o(x) \quad (x\to\infty).$$

其中 o 常数和 δ 无关. 由以上两式得

$$\log(1+\delta)f(x) \leqslant a\delta + o(1) \leqslant (1+\delta)f((1+\delta)x)\log(1+\delta)$$
$$(x\to\infty).$$

由此推出,对任意固定的正数 δ, 有

$$\varlimsup_{x\to\infty} f(x) \leqslant a\delta/\log(1+\delta)$$

及 $\varliminf_{x\to\infty} f(x) = \varliminf_{x\to\infty} f((1+\delta)x) \geqslant a\delta/(1+\delta)\log(1+\delta).$

这样,由 δ 的任意性就推出(7)式. ∎

注 显然,对任意的 $f(x)$,若(7)式成立, 则(6)式一定成立. (读者自证.)

定理 1 的证明 因为 § 2 中命题(11)式即是素数定理

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

而命题(5)式即是

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\psi(u)}{u}\,du = 1. \tag{8}$$

在引理 2 中取 $f(u)=\dfrac{\psi(u)}{u}$, $u_0=2$, 显然条件满足. 这样, 由引理 2 及其注就证明了定理. ∎

相应于 § 2 中的定理 3, 对 $S(x)$ 有下面的

定理 2 对 $x\geqslant 2$, 有

$$\frac{|S(x)|}{x} \leqslant \frac{1}{(\ln x)^2}\sum_{n<x}\frac{\Lambda_2(n)}{n}\,\frac{\left|S\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{\frac{x}{n}} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right). \tag{9}$$

证 设 $y\geqslant 2$. 在 § 2 (13′)式两边同除以 x 并积分, 得

(注意其中级数实际上是一有限和)：

$$\int_2^y \frac{R(x)}{x}\ln x\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\int_2^y R\left(\frac{x}{n}\right)\frac{dx}{x}\ll y.$$

由 $S(x)$ 的定义及(3)式可得：

$$\int_2^y \frac{R(x)}{x}\ln x\,dx=S(y)\ln y-\int_2^y\frac{S(x)}{x}\,dx$$

$$=S(y)\ln y+O(y),$$

及

$$\int_2^y R\left(\frac{x}{n}\right)\frac{dx}{x}=\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{y}{n}}\frac{R(t)}{t}\,dt=\int_2^{\frac{y}{n}}\frac{R(t)}{t}\,dt=S\left(\frac{y}{n}\right).$$

从以上三式得到

$$S(y)\ln y+\sum_{n\leqslant y}\Lambda(n)\,S\left(\frac{y}{n}\right)\ll y. \tag{10}$$

上式当 $y<2$ 时，显然也成立．这一关系式相当于 $R(x)$ 的关系式(§2(13)式)．同从§2(13)式证明§2的定理3的推导完全一样(只要把变量 x 换为 y, $R(x)$ 换为 $S(y)$)，由(10)式可推出(9)式(变量 x 亦换为 y)．详细的推导留给读者．▮

利用第三章§1引理2及 $\Lambda_2(n)$ 的渐近公式(本章§2(5)式)，可把(9)式写为积分形式，从而消去了变化不规则的算术函数 $\Lambda_2(n)$．

定理3 对 $x\geqslant 2$，有

$$\frac{|S(x)|}{x}\leqslant\frac{2}{(\ln x)^2}\int_1^x\frac{\ln t}{t}\frac{\left|S\left(\frac{x}{t}\right)\right|}{\frac{x}{t}}\,dt+O\left(\frac{1}{\ln x}\right). \tag{11}$$

证 取 $a(n)=\Lambda_2(n)$, $y=1$, $f(t)=S\left(\frac{x}{t}\right)$, $H(t)=2t\ln t$

由第三章§1引理3*)、本章§2(5)式、$S(1)=0$ 及 $r(1)=0$ 得:

$$\sum_{n<x}\Lambda_2(n)S\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$=\int_1^x S\left(\frac{x}{t}\right)(2\ln t+1)dt+\int_1^x r(t)\,\frac{R\left(\frac{x}{t}\right)}{t}\,dt$$

$$=2\int_1^x \ln t\,S\left(\frac{x}{t}\right)dt+O(x\ln x),$$

最后一步用到了 $S(y)\ll y$, $R(y)\ll y$ 及 $r(y)\ll y$. 由上式及(9)式就推出(11)式. ▌

积分

$$\frac{2}{(\ln x)^2}\int_1^x\frac{\ln t}{t}\,dt=1, \tag{12}$$

所以,(11)式右端的主项恰好是一个积分加权平均.

最后,为了方便起见,把 $S(x)$ 再转化为讨论

$$W(y)=e^{-y}S(e^y)\quad(y\geqslant 0). \tag{13}$$

这样,素数定理就等价于要证明

$$\lim_{y\to\infty}W(y)=0. \tag{14}$$

由 $S(x)$ 的性质容易推出 $W(y)$ 具有性质:

引理3 (i) 对引理1中的常数 c_1, 有

$$|W(y)|\leqslant c_1,\quad y\geqslant 0, \tag{15}$$

$$|W(y_2)-W(y_1)|\leqslant 2c_1|y_2-y_1|\quad(y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0), \tag{16}$$

(ii) 对 $y\geqslant 1$, 有

$$|W(y)|\leqslant\frac{2}{y^2}\int_0^y(y-v)\,|W(v)|\,dv+O\left(\frac{1}{y}\right). \tag{17}$$

---

*) 读者容易证明, 在 $S\left(\frac{x}{t}\right)$ 满足的条件下,第三章§1引理2仍成立.

(iii) 存在一个正常数 c_2, 使若

$$W(y)\neq 0 \quad (0\leqslant y_1<y<y_2), \tag{18}$$

则有

$$\int_{y_1}^{y_2}|W(y)|dy\leqslant c_2. \tag{19}$$

证 (15)式由(3)式推出. 为证明(16)式不妨设 $y_2\geqslant y_1$, 由(2)及(3)式得

$$\begin{aligned}|W(y_2)-W(y_1)| &\leqslant e^{-y_2}|S(e^{y_2})-S(e^{y_1})| \\ &\quad +|S(e^{y_1})||e^{-y_2}-e^{-y_1}| \\ &\leqslant c_1e^{-y_2}(e^{y_2}-e^{y_1})+c_1e^{y_1}(e^{-y_1}-e^{-y_2}) \\ &=2c_1(1-e^{-(y_2-y_1)})\leqslant 2c_1(y_2-y_1),\end{aligned}$$

这就证明了(16)式. 在(11)式中令 $x=e^y$, 并作积分变量替换 $t=e^{y-v}$, 即得(17)式.

最后证明(19)式. 作变量替换 $x=e^y$, 设 $x_1=e^{y_1}$, $x_2=e^{y_2}$, 利用分部积分由(3)式得

$$\int_{y_1}^{y_2}W(y)dy=\int_{x_1}^{x_2}\frac{S(x)}{x^2}dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{R(x)}{x^2}dx+O(1).$$

而当 $x\geqslant 2$ 时, 由 $R(x)$ 的定义及第三章§3(3)式可得

$$\int_2^x\frac{R(t)}{t^2}dt=\int_2^x\frac{\psi(t)}{t^2}dt-\int_2^x\frac{dt}{t}=O(1),$$

上式对 $x<2$ 显然亦成立. 由以上两式得: 对任意 $y_2<y_1$ 有

$$\int_{y_1}^{y_2}W(y)dy=O(1). \tag{20}$$

由于 $W(y)$ 是连续函数, 故当条件(18)成立时, 由(20)式即推出(19)式成立. ▌

下一节就证明(14)式成立.

§4 定理的证明

定理 1 设 $W(y)$ 由 §3(13)式给出. 由 $W(y)$ 所满足的四条性质, 即 §3 中的(15)、(16)、(17)及(19)式可以推出

$$\lim_{y\to\infty} W(y)=0. \tag{1}$$

下面先证明两条引理:

引理 1 设

$$\alpha=\overline{\lim_{y\to\infty}}\,|W(y)|,\qquad \beta=\overline{\lim_{y\to\infty}}\,\frac{1}{y}\int_0^y |W(t)|\,dt. \tag{2}$$

则由 §3 中的(15)和(17)式可推出

$$\alpha=\beta. \tag{3}$$

证 由 §3(15)式知, α、β 均为有限. 而由上极限定义可立即推出

$$\beta\leqslant\alpha. \tag{4}$$

另一方面, 交换积分号可得

$$\int_0^y dt\int_0^t |W(v)|\,dv=\int_0^y (y-v)\,|W(v)|\,dv.$$

由上式及 §3(17)式就得到

$$|W(y)|\leqslant\frac{2}{y^2}\int_0^y t\left(\frac{1}{t}\int_0^t |W(v)|\,dv\right)dt+O\left(\frac{1}{y}\right).$$

由此, 从上极限的定义就推出

$$\alpha\leqslant\beta. \tag{5}$$

由(4)式及(5)式就证明了(3)式. ∎

引理 2 设 α 由(2)式给出. 则由 §3 中的(15)、(16)及(19)式可证明: 对任意正数 $\tau>\alpha$, 必有正数 y_τ, 使若 a、b 是 $W(y)$ 的两个零点, 满足

$$b>a\geqslant y_\tau, \tag{6}$$

就一定有

$$\int_a^b |W(y)|dy \leqslant \left(1-\frac{\alpha^2}{4c_1c_2}\right)(b-a)\tau, \tag{7}$$

其中 c_1、c_2 是使 § 3(15)和(19)式成立的正常数，且取得足够大，使满足

$$\frac{1}{2} \leqslant 1-\frac{\alpha^2}{4c_1c_2}. \tag{8}$$

证 由 § 3(15)式知 α 有界．由上极限定义知，对任给的正数 $\tau>\alpha$，必有 y_τ，使得

$$|W(y)| \leqslant \tau, \quad y \geqslant y_\tau. \tag{9}$$

下面证明这一 y_τ 就满足引理的要求．

先设 a、b 是相邻的零点．所以

$$W(a)=W(b)=0, \tag{10}$$

$$W(y) \neq 0 \quad (a<y<b). \tag{11}$$

对 $b-a$ 分三种情形来讨论：

[i] $b-a \geqslant 2c_2/\tau$．由(11)式知 § 3(19)式($y_1=a$, $y_2=b$)成立，所以，这时有

$$\int_a^b |W(y)|dy \leqslant c_2 \leqslant \frac{\tau}{2}(b-a).$$

[ii] $b-a \leqslant \tau/c_1$．由(10)式及 § 3(16)式得

$$\begin{aligned}\int_a^b |W(y)|dy &= \int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} |W(y)-W(a)|dy \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b |W(b)-W(y)|dy \\ &\leqslant 2c_1\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} (y-a)dy + c_2 2\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b (b-y)dy \\ &= \frac{c_1}{2}(b-a)^2 \leqslant \frac{\tau}{2}(b-a).\end{aligned}$$

[iii] $\tau/c_1<b-a<2c_2/\tau$. 这时，由(9)式及类似于情形[ii]可得

$$\int_a^b |W(y)|dy=\int_a^{a+\tau/2c_1}|W(y)-W(a)|dy+\int_{a+\tau/2c_1}^{b-\tau/2c_1}|W(y)|dy$$

$$+\int_{b-\tau/2c_1}^{b}|W(b)-W(y)|dy$$

$$\leqslant\frac{\tau^2}{4c_1}+\left(b-a-\frac{\tau}{c_1}\right)\tau+\frac{\tau^2}{4c_1}$$

$$\leqslant\left(1-\frac{\tau}{2c_1(b-a)}\right)(b-a)\tau$$

$$<\left(1-\frac{\tau^2}{4c_1c_2}\right)(b-a)\tau.$$

综合以上结果，并注意到(8)式及 $\tau>\alpha$，即得(7)式.

当 a、b 不是相邻零点时，设

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_K=b,$$

使得 a_k、$a_{k+1}(0\leqslant k\leqslant K-1)$ 均为相邻零点. 由已证明的结论推出

$$\int_a^b|W(y)|dy=\sum_{k=1}^{k-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}|W(y)|dy$$

$$\leqslant\left(1-\frac{\alpha^2}{4c_1c_2}\right)\tau\sum_{k=1}^{K-1}(a_{k+1}-a_k)=\left(1-\frac{\alpha^2}{4c_1c_2}\right)(b-a)\tau,$$

所以，(7)式亦成立. ∎

定理1的证明 显见，(1)式就是要证明 $\alpha=0$. 分两种情形来证明：

[i] 对充分大的 y 必有 $W(y)\neq0$. 这时由§3(19)式推出 $\beta=0$，进而由引理1即得 $\alpha=0$.

[ii] $W(y)$ 可能出现任意大的零点. 对任给的 $\tau>\alpha$ 及任意正数 $y>y_\tau$（y_τ 见引理2），设 a 是 y_τ 右端的第一个零点，b 是 y 的左端的第一个零点，则由§3中的(15)和(19)式，及引

理 2 得到

$$\int_0^y |W(t)|\,dt=\int_c^a+\int_a^b+\int_b^y$$

$$\leqslant c_1 y_\tau+\left(1-\frac{\alpha^2}{4c_1c_2}\right)(b-a)\tau+2c_2.$$

在上式两端除以 y 并取上极限，得(注意：$b-a\leqslant y$)：

$$\beta=\varlimsup_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y|W(t)|\,dt\leqslant\left(1-\frac{\alpha^2}{4c_1c_2}\right)\tau.$$

令 $\tau\to\alpha$，得 $\qquad \beta\leqslant\left(1-\dfrac{\alpha^2}{4c_1c_2}\right)\alpha.$

进而由引理 1 得

$$\alpha\leqslant\left(1-\frac{\alpha^2}{4c_1c_2}\right)\alpha.$$

因为 $\alpha\geqslant 0$，由此推出必有 $\alpha=0$. ▌

注 显见，任意一个函数 $F(y)$，只要它具有相应的性质则以 $F(y)$ 代替 $W(y)$ 时，引理 1、引理 2、定理 1 均成立.

素数定理的第一个证明 由本节定理 1 及 § 3 中定理 1 就推出 $\psi(x)\sim x$. ▌

在结束本章时，我们来回顾一下这里所给出的素数定理 $\psi(x)\sim x$ 的第一个证明究竟用到了些什么. 不难看出，除了一些必要的微积分知识外，整个证明是基于 Чебышев 不等式、Mertens 的定理(第三章 § 2 定理 1) 以及 Selberg 不等式，而这三者都是由 $\psi(x)$ 的基本关系式

$$\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=\ln([x]!)$$

推出来的. 而这一基本关系式仅是算术基本定理(第二章 § 2 引理 1)的推论. 此外，还用到的数论工具是 Möbius 变换理论，而这一理论的基础是第二章 § 3 引理 1，它亦是算术基本定理的推论. 因此，素数定理的基础实质上就是算术基本定

理. 这里可以看出 Чебышев 天才地引进函数 $\psi(x)$ 的伟大贡献. 但是, 实现这一证明是十分困难的. 这是由于我们对素数本身除了它的定义外一无所知, 而它的分布是由极其不规则所决定的. 看来, 对素数定理不可能找到一个简单的证明——不管是初等的, 还是非初等的.

此外, 在本章所给出的证明中, 直接应用的不是 Selberg 不等式(即 §2(3)式)本身, 而是 §3 中不等式(11)(或可以用 §2 中(14)式), 它是 Selberg 不等式的一个推论, 所包含的讯息要比 Selberg 不等式弱得多. 因而, 这里我们仅证明了最简单的渐近公式

$$\psi(x)\sim x,$$

即仅证明了余项

$$R(x)=\psi(x)-x=o(x),$$

而对它的阶不能得到进一步的估计. 下一章我们将对 Selberg 不等式作更仔细的讨论, 用类似的方法证明

$$R(x)=O\left(x(\ln x)^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 为任意小的正数.

第五章习题

1. 设 $\Lambda_2(n)$ 由 §2(6)式给出. 试证明 Selberg 恒等式

$$\Lambda_2(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\left(\ln\frac{n}{d}\right)^2.$$

2. 在 §2 中引理 1 的符号和条件下, 证明对任意正整数 l, 由 §2 中(1)式可推出: 当 $x\geqslant 1$ 时, 有

$$F(x)(\ln x)^l+\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}\sum_{n\leqslant x}\Lambda_j(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\left(\ln\frac{x}{n}\right)^{l-j}$$
$$=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)G\left(\frac{x}{n}\right)\left(\ln\frac{x}{n}\right)^l;$$

且反过来也成立，其中 $\Lambda_s(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\left(\ln\frac{n}{d}\right)^s$.

3. 设 $M(x)=\sum_{n\leq x}\mu(n)$. 试证明:

(a) $M(x)\ln x+\sum_{n\leq x}\Lambda(n)M\left(\frac{x}{n}\right)=O(x)$;

(b) $M(x)\ln x+\sum_{p\leq x}\ln p\,M\left(\frac{x}{p}\right)=O(x)$.

4. 试证明: Selberg不等式(§ 2 中(4)式)和以下各式等价:

(a) $\psi(x)\ln x+\sum_{p\leq x}\ln p\,\psi\left(\frac{x}{p}\right)=2x\ln x+O(x)$;

(b) $\theta(x)\ln x+\sum_{p\leq x}\ln p\,c\left(\frac{x}{p}\right)=2x\ln x+O(x)$;

(c) $\sum_{p\leq x}(\ln^2)p+\sum_{pp'\leq x}\ln p\ln p'=2x\ln x+O(x)$.

5. 试证明: 当 $x>1$ 时，有

$$|R(x)|(\ln x)^2\leq 2\int_1^x\left|R\left(\frac{x}{t}\right)\right|\ln t\,dt+O(x\ln x),$$

其中 $R(x)$由 § 2中(10)式给出.

6. 试证明:

(a) $\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_2(n)}{n}=\ln^2 x+O(\ln x)$;

(b) $\sum_{2\leq n\leq x}\frac{\Lambda_2(n)}{\ln n}=2x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$.

7. 试证明

$$\psi(x)+\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{\ln n}\sum_{lk=n}\Lambda(l)\Lambda(k)=2x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

8. 试证明

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)M\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{\ln n}M\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{lk=n}\Lambda(l)\Lambda(k)$$
$$=O(\ln\ln x).$$

[提示: 利用上题及 $\sum_{n\leq x}\mu(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)M\left(\frac{x}{n}\right)$.]

9. 试证明 $|M(x)|\ln x\leq\sum_{n\leq x}\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|+O(x\ln\ln x)$ *).

---

*) 利用这一不等式可直接证明 $M(x)=o(x)$，因而也证明了素数定理. 见 Постников-Романов[1] 和 Постников[1].

[提示: 由第 3 题(a)及第 9 题可得

$$2|M(x)|\ln x\leqslant\sum_{2\leqslant n\leqslant x}\frac{\Lambda_2(n)}{\ln n}\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|+O(x\ln\ln x),$$

再利用第 6 题(b).]

10. 由素数定理 $\psi(x)\sim x$ 仅能证明

$$\psi(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)=2x\ln x+o(x\ln x),$$

这比 § 2 中(4)式要弱.

11. 设 $A(x)$是一实值函数, $x\geqslant 1$. 若有

$$(*)\qquad \sum_{n\leqslant x}A\left(\frac{x}{n}\right)=ax\ln x+bx+o\left(\frac{x}{\ln x}\right)\quad(x\to+\infty),$$

则

$$A(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)A\left(\frac{x}{n}\right)=2ax\ln x+o(x\ln x)(x\to+\infty).$$

12. 设 $a(n)$是非负算术函数. 在上题中取 $A(x)=\sum_{n\leqslant x}a(n)$, 且式(*)成立. 试证明:

(a) $$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)A\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\Lambda(n)A\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}a(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)+O(x);$$

[提示: 利用双曲型求和法(第四章 § 1 中的(12)式及第三章 § 2 中的定理 4;]

(b) $$\frac{A(x)}{x}+\frac{1}{x\ln x}\left\{\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\Lambda(n)A\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}a(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)\right\}=2a+o(1);$$

[提示: 由(a)及第 11 题推出;]

(c) 若素数定理成立, 则 $A(x)\sim ax$, 特别可推出 $M(x)=o(x)$.

[提示: 取 $a(n)=1+\mu(n)$.]

第 六 章*

第二个证明

§1 证明的途径

1960年, R. Breusch 利用给出第一个证明的同样的初等方法, 作更细致的讨论后, 证明了具有余项估计的素数定理, 即

定理1 对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\psi(x)=x+O\left(x(\ln x)^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}\right) \quad (x\geqslant 2). \tag{1}$$

由第三章§1中定理2知, 这就也证明了

$$\theta(x)=x+O\left(x(\ln x)^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}\right) \quad (x\geqslant 2) \tag{2}$$

及

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O\left(x(\ln x)^{-\frac{7}{6}+\varepsilon}\right) \quad (x\geqslant 2). \tag{3}$$

Breusch 是通过确定 Mertens 的定理 (即第三章§2定理1) 中的余项来证明定理1的. 设

$$\rho(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\ln x+a(x) \quad (x\geqslant 1). \tag{4}$$

第三章§2中的定理1仅仅证明了

$$a(x)=O(1). \tag{5}$$

他证明了

定理2 设 $a(x)$ 由(4)式给出, 再设

$$a(x)=-\gamma+b(x) \quad (x\geqslant 1), \tag{6}$$

其中 γ 为 Euler 常数．则对任给的 $\varepsilon>0$，有

$$b(x)=O\left((\ln x)^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}\right)\quad(x\geqslant 2).\tag{7}$$

由定理 2 马上可以推出定理 **1**，这就是第二个证明的途径．为此，下面先证明一条引理．

引理 1　设 A 为一正数．若

$$b(x)=O((\ln x)^{-A})\quad(x\geqslant 2),\tag{8}$$

则

$$\psi(x)=x+O(x(\ln x)^{-A})\quad(x\geqslant 2).\tag{9}$$

证　由 Abel 恒等式（第三章 § 1 引理 1）易证

$$\psi(x)=x\rho(x)-\int_1^x\rho(t)dt,\tag{10}$$

由 (4)、(6)、(8) 式及上式得

$$\begin{aligned}\psi(x)&=x(\ln x-\gamma)+O(x(\ln x)^{-A})\\&\quad-\int_1^x(\ln t-\gamma)\,dt+O\left(\int_1^x(\ln(2t))^{-A}dt\right)^{*)}.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_1^x(\ln(2t))^{-A}\,dt&=\int_1^{\sqrt{x}}(\ln(2t))^{-A}\,dt+\int_{\sqrt{x}}^x(\ln(2t))^{-A}\,dt\\&\ll\sqrt{x}+x(\ln x)^{-A}.\end{aligned}$$

由以上两式就得到 (9) 式．∎

这样，如果我们证明了定理 2，则由引理 1$\left(\text{取 } A=-\frac{1}{6}+\varepsilon\right)$立即推出定理 1 成立．下面证明定理 2（见本章 § 7），虽然方法和第一个证明原则上相同，但要复杂得多．不过，推导是很初等的，主要是通过对余项 $b(x)$ 的细致而有趣的讨论来实现定理的证明．

---

*) 这里把 $\ln t$ 写为 $\ln(2t)$ 是为了避免 $\ln t$ 在 $t=1$ 时是零．

在第四章§8定理1已经证明素数定理和$b(x)=o(1)$等价.

§2 余项$a(x)$的初步讨论

首先引进两个函数:

$$\rho_1(x)=\int_1^x\frac{\rho(t)}{t}dt\quad(x\geqslant 1).\tag{1}$$

$$\rho_2(x)=\int_1^x\frac{\rho_1(t)}{t}dt\quad(x\geqslant 1).\tag{2}$$

引理1 设

$$g(x)=\int_1^x\frac{a(t)+\gamma}{t}dt,\tag{3}$$

则

$$g(x)=O(1).\tag{4}$$

证 由Abel恒等式(即第三章§1 (2)式)得

$$\rho_1(x)=\int_1^x\Big(\sum_{n\leqslant t}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big)\frac{dt}{t}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\ln\frac{x}{n}.\tag{5}$$

由此及第三章的§1 (12)式、§2 (1)式、§1 (16)式以及第二章§8(1)式和§6(4)式得

$$\begin{aligned}\rho_1(x)&=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big(\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}\frac{1}{m}-\gamma+O\Big(\frac{n}{x}\Big)\Big)\\&=\sum_{mn\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{mn}-\gamma\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}+O\Big(\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\Big)\\&=\sum_{l\leqslant x}\frac{1}{l}\sum_{n\mid l}\Lambda(n)-\gamma\ln x+O(1)\\&=\sum_{l\leqslant x}\frac{\ln l}{l}-\gamma\ln x+O(1)\\&=\frac{1}{2}\ln^2x-\gamma\ln x+O(1).\end{aligned}\tag{6}$$

而另一方面，由(1)、(3)及(4)式得

(7) $$\rho_1(x)=\int_1^x \frac{\ln t-\gamma}{t}dt+g(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x-\gamma\ln x+g(x).$$

比较以上两式即得(4)式. ∎

引理2 设

(8) $$q(x)=\int_1^x \frac{g(t)-(\gamma^2+2\gamma_1)}{t}dt,$$

其中 γ_1 为第三章§1(16)式中的常数，则有

(9) $$q(x)=O(1).$$

证 由式(2)及(5)得

$$\rho_2(x)=\int_1^x\Big(\sum_{n\leq t}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big)\frac{\ln t}{t}dt-\int_1^x\Big(\sum_{n\leq t}\frac{\Lambda(n)}{n}\ln n\Big)\frac{dt}{t}.$$

由 Abel 恒等式(即第三章§1(2)式)可得

$$\int_1^x\Big(\sum_{n\leq t}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big)\frac{\ln t}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 x\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}\ln^2 n,$$

及

$$\int_1^x\Big(\sum_{n\leq t}\frac{\Lambda(n)}{n}\ln n\Big)\frac{dt}{t}$$

$$=\ln x\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}\ln n-\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}\ln^2 n.$$

由以上三式推出

(10) $$\rho_2(x)=\frac{1}{2}\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big(\ln\frac{x}{n}\Big)^2.$$

利用第三章§1(16)式，由此可得

(11) $$\rho_2(x)=\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big\{\sum_{m\leq\frac{x}{n}}\frac{\ln m}{m}-\gamma_1+O\Big(\frac{n}{x}\ln\frac{x}{n}\Big)\Big\}$$

$$=\sum_{mn\leq x}\frac{\Lambda(n)\ln m}{mn}-\gamma_1\ln x+O(1),$$

这里还用到了第三章§2(1)式及第五章§2(8)式. 但另一方面，利用第三章§1(12)式，由(10)式、(5)式及第五章§2(8)式可得

$$(12)\quad \rho_2(x)=\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\left(\ln\frac{x}{n}\right)\left\{\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}\frac{1}{m}-\gamma+O\left(\frac{n}{x}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{mn\leqslant x}\frac{\Lambda(n)\ln m}{mn}+\frac{1}{2}\sum_{mn\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{mn}\ln\frac{x}{mn}$$

$$-\frac{\gamma}{2}\rho_1(x)+O(1).$$

再由第二章§6(4)式及第三章§1(16)式得到

$$(13)\quad \sum_{mn\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{mn}\ln\frac{x}{mn}=\sum_{l\leqslant x}\frac{\ln l}{l}\ln\frac{x}{l}$$

$$=\frac{1}{6}\ln^3 x+\gamma_1\ln x-\gamma_2+O\left(\frac{\ln^3 x}{x}\right).$$

由以上三式及(6)式得到

$$(14)\quad \rho_2(x)=\frac{1}{6}\ln^3 x-\frac{\gamma}{2}\ln^2 x+(\gamma^2+2\gamma_1)\ln x+O(1).$$

但由(2)，(7)，(8)式可得

$$(15)\quad \rho_2(x)=\int_1^x\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\ln^2 t-\gamma\ln t+\gamma^2+2\gamma_1\right)dt+q(x)$$

$$=\frac{1}{6}\ln^3 x-\frac{\gamma}{2}\ln^2 x+(\gamma^2+2\gamma_1)\ln x+q(x).$$

比较以上两式即得(9)式. ▌

引理1表明：$a(x)$平均起来等于$-\gamma$，即$b(x)$平均起来是很小的. 由引理1容易证明(留给读者)：若$a(x)$当$x\to\infty$时有主项，即极限

$$\lim_{x\to\infty}a(x)$$

存在，则一定等于$-\gamma$.

引理2则表明：$g(x)$平均起来等于$\gamma^2+2\gamma_1$. 若$g(x)$有

主项的话，必为 $\gamma^2+2\gamma_1$. 如果令

(16) $$h(x)=g(x)-(\gamma^2+2\gamma_1),$$

这引理就表明 $h(x)$ 平均起来是很小的.

下面几节我们要依次讨论 $b(x)$ 及 $h(x)$ 的性质；它们之间的关系；先得到 $h(x)$ 的阶的估计；最后推出 $b(x)$ 的阶的估计——即证明§1 定理 2.

§3 $b(x)$ 及 $h(x)$ 的 Selberg 型不等式

首先证明几个引理. 以 $c_1, c_2, \cdots$ 表示一些绝对常数.

引理 1

(1) $$\sum_{n<x}\frac{a(n)}{n}=-\gamma\ln x+g(x)+c_2+O\left(\frac{\ln x}{x}\right);$$

(2) $$\sum_{n<x}\frac{1}{n}a\left(\frac{x}{n}\right)=-\gamma\ln x+c_3+O\left(\frac{\ln x}{x}\right);$$

(3) $$\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{n}a(n)=-\gamma\ln x+g(x)+\frac{1}{2}a^2(x)+c_4+O\left(\frac{\ln x}{x}\right);$$

(4) $$\sum_{n<x}\frac{g(n)}{n}=(\gamma^2+2\gamma_1)\ln x+g(x)+c_6+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right);$$

(5) $$\sum_{n<x}\frac{1}{n}g\left(\frac{x}{n}\right)=(\gamma^2+2\gamma_1)\ln x+c_7+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right).$$

证 (1)式的证明：由§1(4)式、第三章§1(12)式、第三章§1(16)式及§2(7)式得

$$\sum_{n<x}\frac{a(n)}{n}=\sum_{n<x}\frac{1}{n}\left(\sum_{m<n}\frac{\Lambda(m)}{m}-\ln n\right)$$

$$=\sum_{m<x}\frac{\Lambda(m)}{m}\sum_{m<n<x}\frac{1}{n}-\sum_{n<x}\frac{\ln n}{n}$$

$$=\sum_{m\le x}\frac{\Lambda(m)}{m}\left(\ln\frac{x}{m}+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+\gamma_1+O\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)$$

$$=-\gamma\ln x+g(x)-\gamma_1$$

$$+\sum_{m\le x}\frac{\Lambda(m)}{m}O\left(\frac{1}{m}\right)+O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

利用 $\Lambda(m)\leqslant\ln m$ 可得

$$\sum_{m\le x}\frac{\Lambda(m)}{m}O\left(\frac{1}{m}\right)=c_1+O\left(\frac{\ln x}{x}\right), \tag{6}$$

其中
$$c_1=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Lambda(m)}{m}O\left(\frac{1}{m}\right).$$

令 $c_2=-\gamma_1+c_1$ 即得(1)式.

(2)式的证明：由 §1(4) 式、第二章 §6(4) 式、第三章 §1(12)式及第三章 §1(16)式得

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}a\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\left(\sum_{m\le\frac{x}{n}}\frac{\Lambda(m)}{m}-\ln\frac{x}{n}\right)$$

$$=\sum_{l\le x}\frac{1}{l}\sum_{m|l}\Lambda(m)-\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}$$

$$=\sum_{l\le x}\frac{\ln l}{l}-\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}$$

$$=-\gamma\ln x+2\gamma_1+O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

取 $c_3=2\gamma_1$ 即得(2)式.

(3)式的证明：利用等式

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}\sum_{m\le n}\frac{\Lambda(m)}{m} \tag{7}$$

$$=\sum_{n\le x}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}+\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}\sum_{m<n}\frac{\Lambda(m)}{m}$$

$$=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big(\sum_{m<n}\frac{\Lambda(m)}{m}+\sum_{n<m\leqslant x}\frac{\Lambda(m)}{m}\Big)$$

$$=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\sum_{\substack{m\leqslant x\\ m\neq n}}\frac{\Lambda(m)}{m}$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2},$$

由§1(4)、§2(5)及§2(7)式得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}a(n)=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\sum_{m\leqslant n}\frac{\Lambda(m)}{m}-\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\ln n$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}$$

$$+\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\ln\frac{x}{n}-\ln x\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}$$

$$=-\gamma\ln x+g(x)+\frac{1}{2}a^2(x)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}.$$

利用 $$\sum_{n\leqslant x}\Lambda^2(n)\leqslant\ln x\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\ll x\ln x,$$

可得(证明留给读者)

(8) $$\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}=c_4+O\Big(\frac{\ln x}{x}\Big),$$

其中 $$c_4=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}.$$

这就证明了(3)式.

(4)式的证明: 由§2(7)式知

(9) $$\sum_{n\leqslant x}\frac{g(n)}{n}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\rho_1(n)}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln^2 n}{n}+\gamma\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n}{n}.$$

利用第三章§1(9)式$\Big($取$f(t)=\dfrac{\rho_1(t)}{t}\Big)$及§2(1)式可得

$$(10)\qquad \sum_{n\le x}\frac{\rho_1(n)}{n}=\int_1^x\frac{\rho_1(t)}{t}\,dt-(x-[x])\frac{\rho_1(x)}{x}$$
$$+\int_1^x(t-[t])\frac{\rho(t)-\rho_1(t)}{t^2}\,dt,$$

由§1(4)、§1(5)及§2(6)式知，上式最后一个积分当$x\to\infty$时收敛，且

$$(11)\qquad \int_1^x(t-[t])\frac{\rho(t)-\rho_1(t)}{t^2}\,dt=c_5+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right),$$

其中
$$c_5=\int_1^\infty(t-[t])\frac{\rho(t)-\rho_1(t)}{t^2}\,dt.$$

这样，由(2)，(6)，(10)及(11)式就得到

$$(12)\qquad \sum_{n\le x}\frac{\rho_1(n)}{n}=\rho_2(x)+c_5+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right).$$

取
$$c_6=\gamma\gamma_1-\frac{\gamma_2}{2}+c_5,$$

由(9)，(10)，(12)，§2(15)式，及第三章§1(16)式即得(4)式.

最后证明(5)式. 由§2中(5)、(7)及第二章§6(4)式得

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}g\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\sum_{m\le\frac{x}{n}}\frac{\Lambda(m)}{m}\ln\frac{x}{nm}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\ln^2\frac{x}{n}+\gamma\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}$$
$$=\sum_{l\le x}\frac{\ln l}{l}\ln\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\ln^2\frac{x}{n}$$
$$+\gamma\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}.$$

利用第三章§1(16)式，并取

$$c_7=-\gamma\gamma_1-\frac{3}{2}\gamma_2,$$

由上式即得(5)式. ∎

在引理1中以§1(6)及§2(16)式代入，可得到关于$b(x)$和$h(x)$的相应的关系式:

(1′) $$\sum_{n<x}\frac{b(n)}{n}=h(x)+c_8+O\left(\frac{\ln x}{x}\right);$$

(2′) $$\sum_{n<x}\frac{1}{n}b\left(\frac{x}{n}\right)=c_9+O\left(\frac{\ln x}{x}\right);$$

(3′) $$\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{n}b(n)=h(x)+\frac{1}{2}b^2(x)+c_{10}+O\left(\frac{\ln x}{x}\right);$$

(4′) $$\sum_{n<x}\frac{h(n)}{n}=q(x)+c_{11}+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right);$$

以及

(5′) $$\sum_{n<x}\frac{1}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)=c_{12}+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right).$$

证明留给读者(在推导(3′)时要用到§1(4)式).

引理2

(13) $$\sum_{n<x}\frac{\mu(n)}{n}=O(1);$$

(14) $$\sum_{n<x}\frac{\mu(n)}{n}\ln\frac{x}{n}=O(1).$$

证 由第二章§6(9)式得

$$x\sum_{n<x}\frac{\mu(n)}{n}=\sum_{n<x}\mu(n)\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)+1=O(x),$$

由此就证明了式(13). 设

(15) $$\sum_{n<x}\frac{x}{n}=x\ln x+\gamma x+s(x).$$

由第三章§1(12)式知

(16) $$s(x)=O(1).$$

(15)式表明函数x的广义 Möbius 变换是$x\ln x+\gamma x+s(x)$，故由广义反转公式(即第二章§6(8)式)知

$$x=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left(\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}+\gamma\frac{x}{n}+s\left(\frac{x}{n}\right)\right),$$

由此及(13)，(16)式，就推出(14)式. ▮

下面证明 $b(x)$ 及 $h(x)$（亦即 $a(x)$ 及 $g(x)$）的 Selberg 型不等式.

定理 1

$$b(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}b\left(\frac{x}{n}\right)=O(1), \tag{17}$$

$$h(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)=O(1). \tag{18}$$

证 在第五章§2引理1中分别取 $F(x)=xb(x)$、$xh(x)$，得到

$$b(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}b\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)G_1\left(\frac{x}{n}\right)\ln\frac{x}{n}, \tag{19}$$

$$h(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)G_2\left(\frac{x}{n}\right)\ln\frac{x}{n}, \tag{20}$$

其中

$$G_1(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{x}{n}b\left(\frac{x}{n}\right), \tag{21}$$

$$G_2(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{x}{n}h\left(\frac{x}{n}\right). \tag{22}$$

由(21)、(2′)、(14)式及对任意 $k\geqslant 0$ 有估计*)

$$\sum_{n\leqslant x}\left(\ln\frac{x}{n}\right)^k\ll x, \tag{23}$$

可得到

---

*) 证明见第五章§1(6)式.

$$\sum_{n<x}\mu(n)G_1\left(\frac{x}{n}\right)\ln\frac{x}{n}$$

$$=\sum_{n<x}\mu(n)\ln\frac{x}{n}\left\{\frac{x}{n}\left(c_9+O\left(\frac{n}{x}\ln\frac{x}{n}\right)\right)\right\}\ll x.$$

由此及(19)式就证明了(17)式. 同样，利用(5′)式代替(2′)式，相应地就可由(20)及(22)式推出(18)式. ∎

§4 $b(x)$和$h(x)$之间的关系

由 $h(x)$ 的 Selberg 型不等 §3(18) 式可以证明 $b(x)$ 和 $h(x)$有如下关系：

定理 1

(1) $$\sum_{n<x}\frac{1}{n}b^2(n)\geqslant|h(x)|\ln x+O(1).$$

为此，先要证明一个引理：

引理 1

(2) $$\sum_{n<x}\frac{1}{n}b^2(n)=\sum_{n<x}\frac{1}{n}b^2\left(\frac{x}{n}\right)+O(1);$$

(3) $$\sum_{n<x}\frac{1}{n}b(n)b\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)+O(1).$$

证 由 §3(3′) 式可得

$$\frac{1}{n}b^2(n)=\frac{2}{n}\sum_{m<n}\frac{\Lambda(m)}{m}b(m)-\frac{2}{n}h(n)$$

$$-\frac{2}{n}c_{10}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

及

$$\frac{1}{n}b^2\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{2}{n}\sum_{m<\frac{x}{n}}\frac{\Lambda(m)}{m}b(m)-\frac{2}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$-\frac{2}{n}c_{10}+O\left(\frac{1}{x}\ln\frac{x}{n}\right).$$

由以上两式及 §3 中(4′)、(5′)及(23)式($l=1$)可得

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\left(b^2(n)-b^2\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$

$$=2\sum_{m\le x}\frac{\Lambda(m)}{m}b(m)\left(\sum_{m<n\le x}\frac{1}{n}-\sum_{n\le\frac{x}{m}}\frac{1}{n}\right)+O(1)$$

$$=2\sum_{m\le x}\frac{\Lambda(m)}{m}b(m)\left\{-\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right)+O\left(\frac{m}{x}\right)\right\}+O(1),$$

最后一步用到了第三章§1(12)式．注意到

$$b(x)=O(1),\ h(x)=O(1),\tag{4}$$

由§3(3′)式得

$$\sum_{m\le x}\frac{\Lambda(m)}{m}b(m)=O(1),$$

$$\sum_{m\le x}\frac{\Lambda(m)}{m^2}b(m)=O(1),$$

$$\frac{1}{x}\sum_{m\le x}\Lambda(m)b(m)=O\left(\frac{1}{x}\sum_{m\le x}\Lambda(m)\right)=O(1),$$

最后一式用到了 Чебышев 不等式．综合以上各式即得(2)式．

由§1中(4)及(6)式、§3(1′)式、(4)式以及第三章§1(12)式得

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}b(n)b\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$=\sum_{n\le x}\frac{b(n)}{n}\left\{\sum_{m\le\frac{x}{n}}\frac{\Lambda(m)}{m}-\ln\frac{x}{n}+\gamma\right\}$$

$$=\sum_{n\le x}\frac{b(n)}{n}\left\{\sum_{m\le\frac{x}{n}}\frac{\Lambda(m)}{m}-\sum_{m\le\frac{x}{n}}\frac{1}{m}+2\gamma+O\left(\frac{n}{x}\right)\right\}$$

$$=\sum_{m\le x}\frac{\Lambda(m)}{m}\sum_{n\le\frac{x}{m}}\frac{1}{n}b(n)-\sum_{m\le x}\frac{1}{m}\sum_{n\le\frac{x}{m}}\frac{1}{n}b(n)+O(1)$$

$$=\sum_{m\le x}\frac{\Lambda(m)}{m}h\left(\frac{x}{m}\right)+c_8\sum_{m\le x}\left(\frac{\Lambda(m)}{m}-\frac{1}{m}\right)$$

$$+O\left(\frac{1}{x}\sum_{m\le x}\Lambda(m)\ln\frac{x}{m}\right)+O\left(\frac{1}{x}\sum_{m\le x}\ln\frac{x}{m}\right)+O(1),$$

由第三章中的§1(12)式和§2(1)式知

$$\sum_{m<x}\left(\frac{\Lambda(m)}{m}-\frac{1}{m}\right)=O(1),$$

由§3(23)式知 $\quad \frac{1}{x}\sum_{m<x}\ln\frac{x}{m}=O(1),$

以及由 Abel 恒等式(第三章§1(2)式)及 Чебышев 不等式得

$$\sum_{m<x}\Lambda(m)\ln\frac{x}{m}=\int_1^x\frac{\psi(t)}{t}\,dt=O(x).$$

综合以上四式即得(3)式. ∎

定理 1 的证明 由(2)及(3)式推出

$$0\leqslant\sum_{n<x}\frac{1}{n}\left(b(n)\pm b\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2$$

$$=2\sum_{n<x}\frac{1}{n}b^2(n)\pm2\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)+O(1),$$

这也就是

$$\sum_{n<x}\frac{1}{n}b^2(n)\geqslant\left|\sum_{n<x}\frac{\Lambda(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)\right|+O(1). \tag{5}$$

由此及§3(18)式即得(1)式. ∎

注 这里不像第一个证明那样把绝对值取进去(见第五章§2中(14)或(17)式), 而是通过 Selberg 型不等式建立了形如(1)式的不等式.

§5 $b(x)$的进一步讨论

本节要仔细讨论 $b(x)$ 的变化情形. 首先由 $b(x)$ 的 Selberg 型不等式 (§3(17)式) 可推出它具有缓慢振动的性质, 这种性质在初等证明中是必须用到的.

定理1 设 $2\leqslant y\leqslant x$，则有

$$(1)\qquad |b(x)-b(y)|\leqslant \ln\frac{x}{y}+O\left(\frac{\ln\dfrac{ex}{y}}{\ln x}\right).$$

证 由§1中(4)及(6)式知

$$(2)\qquad b(x)-b(y)=\rho(x)-\rho(y)-\ln\frac{x}{y}.$$

$\rho(x)$是一个非负的增函数，易于讨论．由$\rho(x)$的递增性，从式(2)即得

$$(3)\qquad b(x)-b(y)\geqslant -\ln\frac{x}{y}.$$

另一方面，利用§1(4)及§1(6)式把§3(17)式写为

$$\begin{aligned}&\ln x(\rho(x)-\ln x+\gamma)+\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\left\{\rho\left(\frac{x}{n}\right)-\ln\frac{x}{n}+\gamma\right\}\\&=\rho(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\rho\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{3}{2}\ln^2 x\\&\quad+3\gamma\ln x+O(1)\\&=O(1).\end{aligned}$$

用到了§2(5)，§2(6)及第三章§2(1)式．利用$\rho(x)$是非负的增函数及$y\leqslant x$，由上式可得

$$\begin{aligned}&\rho(x)\ln x-\rho(y)\ln y\\&\quad=\frac{3}{2}(\ln^2 x-\ln^2 y)-3\gamma\ln\frac{x}{y}-\sum_{y<n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}\rho\left(\frac{x}{n}\right)\\&\quad\quad-\sum_{n\leqslant y}\frac{\Lambda(n)}{n}\left\{\rho\left(\frac{x}{n}\right)-\rho\left(\frac{y}{n}\right)\right\}+O(1)\\&\quad\leqslant\frac{3}{2}\ln\frac{x}{y}(\ln x+\ln y)+O(1),\end{aligned}$$

进而有

$$
\begin{aligned}
&(\rho(x)-\rho(y))\ln x\\
&\quad\leqslant \ln\frac{x}{y}\left(\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{2}\ln y-\rho(y)\right)+O(1)\\
&\quad\leqslant \ln\frac{x}{y}\left(\frac{3}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln y\right)+O\left(\ln\frac{x}{y}\right)+O(1)\\
&\quad\leqslant 2\ln x\ln\frac{x}{y}+O\left(\ln\frac{ex}{y}\right),
\end{aligned}
$$

这里用到了 §1(5)式及 $y\leqslant x$. 由此及(2)式即得

$$
b(x)-b(y)\leqslant \ln\frac{x}{y}+O\left(\frac{\ln\frac{ex}{y}}{\ln x}\right). \tag{4}
$$

由(3)及(4)式就证明了式(1). ▌

下面进一步讨论 $b(x)$ 的变化. 由(2)式知

$$
b(x)=b([x])+\ln\frac{x}{[x]}=b([x])+O\left(\frac{1}{x}\right), \tag{5}
$$

所以只要讨论 $b(n)$ 的变化, n 为自然数. 当 $n\geqslant 2$ 时, 显然有

$$
\begin{aligned}
b(n)-b(n-1)&=\frac{\Lambda(n)}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&=\begin{cases}\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right), & n\neq p^l;\\[2ex] \dfrac{\ln p}{n}+\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right), & n=p^l.\end{cases}
\end{aligned} \tag{6}
$$

注意到当 $n\geqslant 2$ 时, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ 是递减的, 且

$$
e<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\leqslant 4\quad (n\geqslant 2).
$$

由(6)式容易验证 $b(n)$ 具有以下性质:

[i] $b(n)\neq b(n-1)$, 特别地, $b(n)$ 和 $b(n-1)$ 不能同时为零;

[ii] $n\neq p^l$ 时, $b(n-1)>b(n)$;

[iii] $n=2^j$ 时, $b(n-1)>b(n)$;

[iv] $b(3)<b(2)$, 而当 $n=3^j$, $j\geqslant 2$ 时, $b(n-1)<b(n)$;

[v] $p\geqslant 5$ 时, $b(p^j-1)<b(p^j)$;

[vi] $n\geqslant 4$ 时,

$$|b(n)-b(n-1)|<\frac{\ln n}{n}.$$

由计算知开头几个 $b(n)$ 是:

$b(1)=\gamma=0.577215\cdots$, $b(2)=0.230642\cdots$,

$b(3)=0.19138\cdots$, $b(4)=0.07698\cdots$,

$b(5)=0.17572\cdots$, $b(6)=-0.00659\cdots$.

以上的性质和数据表明: $b(n)$时增时减,时正时负, 变化很不规则, 但总的趋势是减小, 且相邻两数之差很小. 为了研究 $b(n)$的变化,我们来考察由使 $b(n)$ 的值发生符号变化的那些 n 所组成的数列:

(7) $$1=n_1<n_2<n_3<\cdots.$$

我们这样来确定这一数列: 取 $n_1=1$, 当 n_{t-1} 确定后, n_t 是具有下述性质的 n 中的最小的.

(8) $$n>n_{t-1},\ b(n)b(n+1)\leqslant 0,\ b(n+1)\neq 0.$$

显然, 这样的数列是唯一确定的*). 容易看出, 当$n_{t-1}<n\leqslant n'<n_t$ 时, 必有

(9) $$b(n)b(n')>0.$$

由列出的数据知, $n_2=5$, 故由 n_t 的定义及 $b(n)$ 的性质[vi]可知:

(10) $$|b(n_t)|+|b(n_t+1)|=|b(n_t+1)-b(n_t)| <\frac{\ln(n_t+1)}{n_t+1}<\frac{\ln n_t}{n_t}\quad (t\geqslant 2),$$

*) 由 $b(n)$ 的性质[i]知, 这样的定义是合理的.

这里用到了当 $x\geqslant e$ 时，$\frac{1}{x}\ln x$ 是递减的.

数列(7)也可能是一有限数列，即从某项开始 $b(n)$ 都是正的或都是负的.

为了讨论 $b(n)$ 数列(7)确定的区间 $[n_{t-1}, n_t]$ 中的变化状况，先证明下面一个引理:

引理 1 设 $A\geqslant 1$ 是给定的正数. 再设整数 m、M 满足

$$4\leqslant m<M,\qquad \ln\frac{M}{m}\leqslant A. \tag{11}$$

如果当 $m\leqslant n\leqslant M$ 时，$b(n)$ 是非负(或非正)的，且满足

$$|b(m)|\leqslant\frac{\ln m}{m}, \tag{12}$$

则有

$$\sum_{m<n<M}\frac{b^2(n)}{n} \tag{13}$$

$$\leqslant\frac{2}{3}\ln\frac{M}{m}\sum_{m<n<M}\frac{|b(n)|}{n}+O\left(\frac{A^2\ln\frac{M}{m}}{\ln m}\right),$$

这里 O 常数是绝对的.

证 我们可假定 $b(n)$ 非负，即

$$b(n)\geqslant 0,\qquad m\leqslant n\leqslant M. \tag{14}$$

对非正的情形可同样证明. 若总有

$$b(n)<\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m},\quad m\leqslant n\leqslant M, \tag{15}$$

则引理显然成立，且系数 $\frac{2}{3}$ 可改为 $\frac{1}{3}$. 不然，设 n^* 是这样唯一确定的整数: $m\leqslant n^*\leqslant M$,

$$b(n^*)\geqslant\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}, \tag{16}$$

以及当 $m\leqslant n<n^*$ 时，

$$(17)\qquad b(n)<\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}.$$

再设 z 是这样唯一确定的正数：当

$$(18)\qquad \ln\frac{n^*}{m}>\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}$$

时，取 z 满足

$$(19)\qquad \ln\frac{n^*}{z}=\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m};$$

不然，取 $z=m$. 这样，总有

$$(20)\qquad m\leqslant z\leqslant n^*\leqslant M.$$

由定理1及条件(16)，(14)，(12)，(11)，(20)可得

$$\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}\leqslant b(n^*)\leqslant|b(n^*)-b(m)|+b(m)$$

$$=\ln\frac{n^*}{m}+O\left(\frac{A}{\ln m}\right).$$

由此及 z 的定义知，总有

$$(21)\qquad \ln\frac{n^*}{z}=\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}+O\left(\frac{A}{\ln m}\right).$$

由(16)，(12)，(17)式及 $b(n)$ 的性质[vi]知，

$$(22)\quad 0\leqslant b(n^*)-\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}$$

$$\leqslant\begin{cases} b(m)<\dfrac{\ln m}{m}, & n^*=m;\\[2ex] b(n^*)-b(n^*-1)<\dfrac{\ln n^*}{n^*}<\dfrac{\ln m}{m}, & n^*>m\geqslant 4.\end{cases}$$

由此及定理1推出：当 $z\leqslant n\leqslant M$ 时，

$$(23)\quad \left|b(n)-\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}\right|=|b(n)-b(n^*)|$$

$$+O\left(\frac{\ln m}{m}\right)\leqslant\left|\ln\ \frac{n^*}{n}\right|+O\left(\frac{A}{\ln m}\right)$$

$$=\left|\ln\frac{n}{z}-\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}\right|+O\left(\frac{A}{\ln m}\right),$$

最后一步用到了(21)式.

这样，由(14)，(17)，(20)，(23)，(20)及(11)式得

$$\sum_{m\leqslant n\leqslant M}\frac{b^2(n)}{n}-\frac{2}{3}\ln\frac{M}{m}\sum_{m\leqslant n\leqslant M}\frac{b(n)}{n}$$

$$\leqslant\sum_{z\leqslant n\leqslant M}\frac{b^2(n)}{n}-\frac{2}{3}\ln\frac{M}{m}\sum_{z\leqslant n\leqslant M}\frac{b(n)}{n}$$

$$=\sum_{z\leqslant n\leqslant M}\frac{1}{n}\left(b(n)-\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}\right)^2+\frac{1}{9}\left(\ln\frac{M}{m}\right)^2\sum_{z\leqslant n\leqslant M}\frac{1}{n}$$

$$\leqslant\sum_{z\leqslant n\leqslant M}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{n}{z}-\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}+O\left(\frac{A}{\ln m}\right)\right)^2$$

$$-\frac{1}{9}\left(\ln\frac{M}{m}\right)^2\sum_{z\leqslant n\leqslant M}\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{z\leqslant n\leqslant M}\frac{1}{n}\ln^2\frac{n}{z}-\frac{2}{3}\ln\frac{M}{m}\sum_{z\leqslant n\leqslant M}\frac{1}{n}\ln\frac{n}{z}$$

$$+O\left(\frac{A^2}{\ln m}\right)\sum_{z\leqslant n\leqslant M}\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{M}{z}\right)^3-\frac{1}{3}\ln\frac{M}{m}\left(\ln\frac{M}{z}\right)^2+O\left(\frac{A^2}{\ln m}\ln\frac{M}{z}\right)$$

$$\leqslant O\left(\frac{A^2}{\ln m}\ln\frac{M}{m}\right).$$

这里还用到了第三章 §1 (12)及(18)式. 这就证明了(13)式. ▌

注 不难看出，(13)式中的求和范围 $m\leqslant n\leqslant M$ 中的任一个"$\leqslant$"号用"$<$"号代替时，仍然成立. (证明留给读者).

完全类似地，可以证明(留给读者)：

引理2 如果把引理1中的条件(12)改为

$$|b(M)|\leqslant\frac{\ln M}{M},\tag{24}$$

其它条件不变，则(13)式仍然成立.

从引理1、2可推出以下引理：

引理3 在引理1的条件下，如果还有(24)式成立，则(13)式右端的系数 $\frac{2}{3}$ 可改为 $\frac{1}{3}$.

证 把区间$[m, M]$分为$[m, (mM)^{\frac{1}{2}}]$和$[(mM)^{\frac{1}{2}}+1, M]$两个区间，并分别用引理1和引理2，合起来即得所要的结论. ∎

由引理3及数列(7)的性质(8)，(9)，(10)立即推出：

定理2 设$t\geqslant 3$，有

$$\sum_{n_{t-1}<n\leqslant n_t}\frac{b^2(n)}{n}\tag{25}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\ln\frac{n_t}{n_{t-1}}\sum_{n_{t-1}<n\leqslant n_t}\frac{b(n)}{n}+O\left(\frac{A^2(t)\ln\frac{M}{m}}{\ln m}\right),$$

其中$A(t)=\ln\frac{en_t}{n_{t-1}}$.

数列(7)的间距大小的变化可能很不规则，而且还可能是一有限数列. 为此，由它出发来构造一个新的无限数列

$$s_1<s_2<s_3<\cdots,\tag{26}$$

使得它的间距不太大，且数列(7)是它的子数列. 我们这样来确定数列(26). 设$B\geqslant 2$满足

$$|b(x)|\leqslant B\quad(x\geqslant 1).\tag{27}$$

取$s_1=n_1$. 若已定义$s_k=n_t$，则(a)当

$$\ln\frac{n_{t+1}}{n_t}<7B\tag{28}$$

时，取 $s_{k+1}=n_{t+1}$；(b) 当

$$\ln\frac{n_{t+1}}{n_t}\geqslant 7B$$

时，我们在 n_t 和 n_{t+1} 之间任意插入一串整数 $s_{k+1}, s_{k+2}, \cdots, s_{k+m}$，使得

$$n_t=s_k<s_{k+1}<s_{k+2}<\cdots<s_{k+m}=n_{t+1},$$

$$(29)\qquad 3B\leqslant\ln\frac{s_{k+j+1}}{s_{k+j}}<7B\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$$

(这总是可以做到的)；(c) 当数列(7)是有限数列

$$n_1<n_2<\cdots<n_{t_0}$$

时，我们在归纳定义了 $s_{k_0}=n_{t_0}$ 之后，在 s_{k_0} 后面任意接上一个无限数列

$$s_{k_0}<s_{k_0+1}<\cdots,$$

满足条件

$$(30)\qquad 3B\leqslant\ln\frac{s_{k_0+j+1}}{s_{k_0+j}}<7B\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

这样，就定义了一个新的无限数列(26)，它以数列(7)为其子数列，且满足

$$(31)\qquad \ln\frac{s_{k+1}}{s_k}<7B\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

这样，由定理 2 立即推出

定理 3 当 $k\geqslant3$ 时，有

$$(32)\qquad \sum_{s_{k-1}<n\leqslant s_k}\frac{b^2(n)}{n}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}\sum_{s_{k-1}<n\leqslant s_k}\frac{b(n)}{n}+O\left(\frac{B^2\ln\dfrac{s_k}{s_{k-1}}}{\ln s_{k-1}}\right)$$

证 当
$$\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}\geqslant 3B$$
时，由(27)式知，(32)式显然成立．而当
$$\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}<3B$$
时，由 s_k 的取法(见(28)～(30)式)知，s_{k-1} 与 s_k 即为某一对 n_{t-1} 与 n_t．这样，在(25)式中可取
$$A(t)=4B,$$
这就证明了(32)式．▮

§6 $h(x)$ 的估计

为了证明§1定理2，即估计 $b(x)$ 的阶，我们先来估计 $h(x)$ 的阶．首先要证明

定理1 对于任意的实数 $\alpha<\frac{1}{3}$，有

(1) $$h(x)=O(\ln^{-\alpha}x)\quad (x\geqslant 2).$$

证 用反证法：假设对某一 $\alpha<1/3$ 结论不成立，则 $|h(x)|(\ln x)^{\alpha}$ 当 $x\to\infty$ 时一定无界．由于 $h(x)$ 是连续函数(见§2中(1)、(7)及(16)式)，所以 $|h(x)|(\ln x)^{\alpha}$ 在任一有限区间上一定取到它的最大值．因而，若以 $\tilde{x}$ 表这样的正数：

(2) $$|h(x)|(\ln x)^{\alpha}\leqslant|h(\tilde{x})|(\ln\tilde{x})^{\alpha}\quad (x\leqslant\tilde{x}).$$

这种 $\tilde{x}$ 必存在，且由 $|h(x)|\ln^{\alpha}x$ 的无界性知，$\tilde{x}\to\infty$，以及

(3) $$|h(\tilde{x})|(\ln\tilde{x})^{\alpha}\to\infty\quad (\tilde{x}\to\infty).$$

以下总假定 $\tilde{x}$ 充分大．对每一个 $\tilde{x}$ 必有唯一确定的两个整数 $H\geqslant 3$ 及 K，使得

(4) $$s_{H-1}<\ln\tilde{x}\leqslant s_H,\quad s_K\leqslant\tilde{x}<s_{K+1},$$

这里 s_k 是数列§5(26)中的数．

现在来考虑函数

$$(5)\qquad S(\tilde{x})=\sum_{k=H+1}^{K}|h(s_k)-h(s_{k-1})|\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}.$$

我们先证明：若对某一个 $\alpha<\frac{1}{3}$，(3)式成立，则必有不等式

$$(6)\qquad \frac{1}{2}\left(1-\alpha+O\left(\frac{1}{\ln\ln\tilde{x}}\right)\right)S(\tilde{x})$$

$$\leqslant|h(\tilde{x})|\ln\tilde{x}\leqslant\frac{1}{3}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln\tilde{x}}{(\ln\tilde{x})^{\frac{2}{3}}}\right)\right)S(\tilde{x}).$$

由此即导致矛盾．因为从右半不等式及(3)式$\left(\alpha<\frac{1}{3}\right)$可推出

$$S(\tilde{x})\to+\infty,\qquad \tilde{x}\to+\infty,$$

故由(6)式得 $$\frac{1}{2}(1-\alpha)\leqslant\frac{1}{3},$$

即 $\alpha\geqslant\frac{1}{3}$．由这一矛盾就证明了本定理．

不等(6)式的证明 先证明(6)式左端的不等式．由(4)与(2)式得

$$(7)\qquad |h(\tilde{x})|\ln\tilde{x}$$

$$=|h(\tilde{x})|\ln^{\alpha}\tilde{x}\Big\{(\ln\tilde{x})^{1-\alpha}-(\ln s_k)^{1-\alpha}$$

$$+\sum_{k=2}^{K}[(\ln s_k)^{1-\alpha}-(\ln s_{k-1})^{1-\alpha}]\Big\}$$

$$\geqslant|h(\tilde{x})|\ln^{\alpha}\tilde{x}\sum_{k=2}^{K}\{(\ln s_k)^{1-\alpha}-(\ln s_{k-1})^{1-\alpha}\}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=H+1}^{K}(|h(s_k)|\ln^{\alpha}s_k+|h(s_{k-1})|(\ln)^{\alpha}s_{k-1})$$

$$\times\{(\ln s_k)^{1-\alpha}-(\ln s_{k-1})^{1-\alpha}\}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=H+1}^{K}|h(s_k)-h(s_{k-1})|$$

$$\times\{(\ln s_k)^{1-\alpha}-(\ln s_{k-1})^{1-\alpha}\}\ln^{\alpha}s_{k-1}.$$

当 $1\leqslant y\leqslant z$ 时，有不等式

$$y^{\alpha}(z^{1-\alpha}-y^{1-\alpha})$$

$$=y^{\alpha}(1-\alpha)\int_{y}^{z}t^{-\alpha}\,dt>(1-\alpha)(z-y)\left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha}$$

$$>(1-\alpha)(z-y)\left(\frac{y}{z}\right)>\left(1-\alpha-\frac{z-y}{z}\right)(z-y),$$

取 $y=\ln s_{k-1}$, $z=\ln s_k$, 由上式及(4)式、§5(31)式得

$$\{(\ln s_k)^{1-\alpha}-(\ln s_{k-1})^{1-\alpha}\}\ln^{\alpha}s_{k-1}$$

$$>\left(1-\alpha-\frac{7B}{\ln\ln\tilde{x}}\right)\ln\frac{s_k}{s_{k-1}},\quad k>H.$$

由此及(7)式即得(6)式的左端不等式.

下面证明(6)式的右端的不等式. 由§5(27)式, §5(31)式及(4)式可得:

$$\sum_{n\leqslant s_H}\frac{b^2(n)}{n}=O(\ln\ln\tilde{x}),$$

$$\sum_{s_K<n\leqslant x}\frac{b^2(n)}{n}=O(1),$$

以及

$$(8)\qquad \sum_{k=H+1}^{K}\frac{1}{\ln s_k}\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}\leqslant\sum_{k=H+1}^{K}\ln\left(\frac{\ln s_k}{\ln s_{k-1}}\right)\leqslant\ln\ln\tilde{x}.$$

由以上三式及§5定理3得到

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{b^2(n)}{n}=\sum_{k=H+1}^{K}\sum_{s_{k-1}<n\leqslant s_k}\frac{b^2(n)}{n}+O(\ln\ln\tilde{x})$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\sum_{k=H+1}^{K}\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}\sum_{s_{k-1}<n\leqslant s_k}\frac{|b(n)|}{n}+O(\ln\ln\tilde{x}).$$

再由于 $b(n)$ 在区间 $(s_{k-1},\ s_k]$ 中必为非负(或非正), 故由§3(1′)式得*):

*) (9)式和假设无关，是一定成立的。

当 $k\geqslant 2$ 时，有

$$(9)\qquad \sum_{s_{k-1}<n\leqslant s_k}\frac{|b(n)|}{n}=|h(s_k)-h(s_{k-1})|+O\left(\frac{\ln s_{k-1}}{s_{k-1}}\right).$$

利用以上两式，由§4 定理 1 可推出

$$(10)\qquad |h(\tilde{x})|\ln\tilde{x}\leqslant\frac{1}{3}S(\tilde{x})+O(\ln\ln\tilde{x}),$$

这里还用到了由(8)及§5(31)式得到的估计

$$\begin{aligned}\sum_{k=H+1}^{K}\frac{\ln s_{k-1}}{s_{k-1}}\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}&\ll\sum_{k=H+1}^{K}\frac{\ln s_k}{s_k}\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}\\&\ll\sum_{k=H+1}^{K}\frac{1}{\ln s_k}\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}\\&\ll\ln\ln\tilde{x}.\end{aligned}$$

由(3)式及 $\alpha<\frac{1}{3}$ 知

$$S(\tilde{x})\gg(\ln\tilde{x})^{\frac{2}{3}}.$$

由此及(10)式就证明了(6)式右端的不等式. ▌

§7　§1 定理 2 的证明

利用§6 中的定理 1、§3(1′)式及§5 中的定理 1 就可以证明§1 中的定理 2.

§1 定理 2 的证明　对任意的 $\alpha<\frac{1}{3}$，由§6 (9) 式，§6(1)式及§5(31) 式得

$$(1)\qquad \sum_{s_{k-1}<n\leqslant s_k}\frac{|b(n)|}{n}=O((\ln s_k)^{-\alpha})\quad(k\geqslant 2),$$

这里的 O 常数和 k 无关. 不妨假定当 $s_{k-1}<n<s_k$ 时 $b(n)>0$ 及 $b(s_k)\geqslant 0$. 设 n^* 是任一满足以下条件的整数：

$$s_{k-1}<n^*\leqslant s_k,$$

$$b(n^*)\geqslant b(n),\quad s_{k-1}<n\leqslant s_k.$$

对取定的 n^*, 以下三种情形至少有一种出现:

[i] $b(n)\geqslant\frac{1}{2}b(n^*),\quad s_{k-1}<n\leqslant s_k;$

[ii] 存在 n', $s_{k-1}\leqslant n'<n^*$, 使得

$$b(n')<\frac{1}{2}b(n^*),$$

但当 $n'<n\leqslant n^*$ 时,

$$b(n)\geqslant\frac{1}{2}b(n^*);$$

[iii] 存在 n', $n^*<n'\leqslant s_k$, 使得

$$b(n')<\frac{1}{2}b(n^*),$$

而当 $n^*\leqslant n<n'$ 时,

$$b(n)\geqslant\frac{1}{2}b(n^*).$$

当情形[i]出现时, (a) 若有

$$3B\leqslant\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}\leqslant 7B,$$

则由(1)式得

$$(2)\qquad b(n)\leqslant b(n^*)\leqslant 2\Big(\sum_{s_{k-1}<n\leqslant s_k}\frac{1}{n}\Big)^{-1}\Big(\sum_{s_{k-1}<n\leqslant s_k}\frac{|b(n)|}{n}\Big)$$
$$\ll\ln^{-\alpha}s_k\leqslant\ln^{-\alpha}n,\quad s_{k-1}<n\leqslant s_k;$$

若有
$$\ln\frac{s_k}{s_{k-1}}<3B,$$

则由§5中的数列(26)的构造及数列(7)的性质(10)知:

$$(3)\qquad b(n)\leqslant b(n^*)\leqslant 2\,b(s_k)<\frac{2\ln s_k}{s_k}$$
$$\ll\ln^{-\alpha}s_k\ll\ln^{-\alpha}n,\quad s_{k-1}<n\leqslant s_k.$$

当情形[ii]出现时, 由第三章 §1(12)、本章§5 (27)及(31)式得

$$\sum_{s_{k-1}<n\leqslant s_k}\frac{b(n)}{n}\geqslant\sum_{n=n'+1}^{n^*}\frac{b(n)}{n}\geqslant\frac{1}{2}b(n^*)\sum_{n=n'+1}^{n^*}\frac{1}{n}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}b(n^*)\ln\frac{n^*}{n'}+O\left(\frac{1}{s_k}\right).$$

进而由§5中的定理1及§5(31)式知

$$\ln\frac{n^*}{n'}\geqslant b(n^*)-b(n')+O\left(\frac{1}{\ln s_k}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}b(n^*)+O\left(\frac{1}{\ln s_k}\right).$$

由以上两式及(1)式推出

$$b^2(n^*)=O((\ln s_k)^{-\alpha}),$$

因而得

$$b(n)\leqslant b(n^*)=O((\ln s_k)^{-\frac{\alpha}{2}})=O((\ln n)^{-\frac{\alpha}{2}}),\quad s_{k-1}<n\leqslant s_k. \tag{4}$$

当情形[iii]出现时，完全同样地可证明(4)式成立.

综合(2)，(3)，(4)式，证明了对任意的 $\alpha<\frac{1}{3}$，有

$$b(n)=O((\ln n)^{-\frac{\alpha}{2}}),\quad s_{k-1}<n\leqslant s_k.$$

由于这里的 O 常数和 k 无关，这就证明了§1中的定理2. ∎

第六章习题

1．设 $F_0(x)=\sum\limits_{n<x}a(n)$，$F_{k+1}(x)=\int_1^x\frac{F_k(t)}{t}dt$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$. 试证明：$F_k(x)=\frac{1}{k!}\sum\limits_{n<x}a(n)\left(\ln\frac{x}{n}\right)^k$ $(k=1, 2, \cdots)$.

2．设 $a(x)$ 由§1(4)式给出．试证明：极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}a(x)$ 若存在，则必等于 $-\gamma$.

3．设 $g(x)$ 由§2(3)式给出．试证明：极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ 若存在，则必等于 $\gamma^2+2\gamma_1$.

4．证明§3(8)式.

5．证明§3中(1′)至(5′)式.

第 七 章**

第三个证明(简介)

本章简单介绍如下形式的素数定理的实分析证明：对任意正数 $A>0$，有

$$(*)\qquad \psi(x)=x+O(x(\ln x)^{-A}),$$

其中 O 常数和 A 有关. 由第三章 § 1 定理 2 知这一命题与

$$\theta(x)=x+O(x(\ln x)^{-A}),$$

$$\pi(x)=\mathrm{Li}x+O(x(\ln x)^{-A-1})$$

均等价，其中 $\mathrm{Li}x$ 是由第三章 § 1(22)式给出的对数积分.

E. Bombieri 证明这一命题的途径和我们的第一个证明本质上是一样的. 他首先正确地推广了 Selberg 不等式，然后从他得到的一般的 Selberg 不等式出发，经过类似的实分析讨论，证明了这一命题. 但是，这两个方面都要比第一个证明复杂得多，尤其是后者要用到许多变换理论和实变函数论的知识. 本章仅证明一般的 Selberg 不等式，然后极其简略地指出如何从它来证明这一命题. 详细证明可参看 Bombieri[1].

还应该指出的是：Bombieri 的证明需要用到第二个证明所得到的那种结果，即存在一个正数 α，使得

$$\psi(x)=x+O(x(\ln x)^{-\alpha}),$$

而仅用 $\psi(x)\sim x$ 是不够的. 在第二个证明中已经指出 α 可取任意小于 $\frac{1}{6}$ 的正数.

在第五章§1中我们已经简单说明了这一证明的想法. 要求出一个函数，它的广义 Möbius 变换为 $(T(x)-T_1(x))(\ln x)^l\,(l\geqslant 2)$（见第五章§1）并不困难. 但是，如何找到一种正确的形式把 Selberg 不等式（第五章§2(3)式）[特别是把在第一个证明中直接应用的这个不等式的一个加权平均并取绝对值后得到的不等式（第五章§2(14)式）]推广到任意的 $l\geqslant 2$ 的情形，以使有可能从此推出(*)式，却远非一件简单的事情. 本章的目的与其说是要证明(*)式，还不如说是要得到一般的 Selberg 不等式. 我们将在第五个证明（见第十一章§5定理1）中用初等的函数论方法来证明(*)式.

为了推广 Selberg 不等式，需要进一步讨论在前面几章中起着十分重要作用的两种数论运算：算术函数 $f(n)$ 的 Möbius 变换（见第二章§2(12)式）

$$g(n)=\sum_{d\mid n}f(d),$$

以及实函数 $F(x)\,(x\geqslant 1)$ 的广义 Möbius 变换（见第二章§6(7)式）

$$G(x)=\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)\quad(x\geqslant 1).$$

我们要分别推广这两种运算，讨论在初等数论中十分重要的 Dirichlet 卷积（本章§1）及广义 Dirichlet 卷积（本章§2）. 也可以说本章的目的就是为了介绍这两种运算. 关于卷积的基本知识参看 Apostol[1]第二章及 Amitsur[1].

§1 Dirichlet 卷积

我们以 $\mathbb{A}$ 表由全体算术函数所组成的集合. 同时为了方便起见，用一些符号来代表常用的几个算术函数，其中有的

符号也可以代表定义在 $x\geqslant 1$ 上的实函数，这在使用中是不会混淆的．这些符号列于下表：

表 1

符号	代表的算术函数	代表的实函数
u	$u(n)=\left[\frac{1}{n}\right],\ n=1,2,\cdots$	$u(x)=\left[\frac{1}{x}\right],\ x\geqslant 1$
I	$I(n)=1,\ n=1,2,\cdots$	$I(x)=1,\ x\geqslant 1$
L	$L(n)=\ln n,\ n=1,2,\cdots$	$L(x)=\ln x,\ x\geqslant 1$
N	$N(n)=n,\ n=1,2,\cdots$	$N(x)=x,\ x\geqslant 1$
μ	Möbius 函数(见第二章 § 3(4)式)	—
Λ	Mangoldt 函数(见第二章§ 5(3)式)	—

定义1 设 $f\in\mathbb{A}$, $g\in\mathbb{A}$. 我们把由等式

$$h(n)=\sum_{d\mid n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \tag{1}$$

定义的算术函数 h 称为 f 和 g 的 Dirichlet 卷积(简称卷积)，记作

$$h=f*g. \tag{2}$$

利用表 1 中的符号，前面所证明的公式可改写为：

(3) $\mu*I=u,$ (见第二章 § 3(6)式)；

(4) $\Lambda*I=L,$ (见第二章 § 6(4)式)；

(5) $\mu*L=\Lambda,$ (见第二章 § 6(5)式)；

(6) $(\mu L)*I=-\Lambda,$ (见第二章 § 6(5)式).

公式(3)和(4)是卷积的基本公式．利用卷积符号，算术函数 f 的 Möbius 变换可写为

$$f*I. \tag{7}$$

下面我们来讨论卷积的性质：

由第二章 § 2(14)式及除数定义，有

(8) $$\sum_{d\mid n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n} f\left(\frac{n}{d}\right)g(d)=\sum_{dr=n} f(d)g(r),$$

这里最后一个和式表示对所有满足 $dr=n$ 的正整数对 d、r 求和. 从这最后一个式子可清楚看出，在这些和式中，f 和 g 的地位是对称的。根据卷积的定义和式(8)立即可推出下面的卷积的最基本的性质.

定理 1 (a)分配律: 对任意复数 c_1、c_2 有

(9) $$(c_1 f_1+c_2 f_2)*g=c_1(f_1*g)+c_2(f_2*g),$$

(b)算术函数 u 是卷积的单位，即对任意的 $f\in\mathbb{A}$ 有

(10) $$u*f=f*u=f,$$

(c)交换律:

(11) $$f*g=g*f.$$

(d)结合律:

(12) $$f*(g*h)=(f*g)*h.$$

证 性质(a)和(b)可由卷积的定义((1)式)直接验证. 性质(c)由定义 1 及(8)式的第一个等式立即推出. 下面证明性质(d): 利用(8)式的最后一个表达式表示卷积，得到

(13) $$\begin{aligned}(f*(g*h))(n)&=\sum_{dr=n} f(d)(g*h)(r)\\&=\sum_{dr=n} f(d)\sum_{st=r} g(s)h(t)\\&=\sum_{dst=n} f(d)g(s)h(t),\end{aligned}$$

同样有，

(14) $$\begin{aligned}((f*g)*h)(n)&=\sum_{dr=n}(f*g)(d)h(r)\\&=\sum_{dr=n}\Big(\sum_{st=d} f(s)g(t)h(r)\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{str=n} f(s)g(t)h(r).$$

由以上两式就证明了性质(d)，因为这两式的右端是同一个和式，仅是字母不同而已。▌

由卷积的交换律和结合律知，任意多个算术函数不管以怎样的次序来作卷积，其最后的结果是一样的，所以可写为

$$f_1 * f_2 * \cdots * f_k. \tag{15}$$

类似于(13)式那样，容易证明

$$(f_1 * f_2 * \cdots * f_k)(n) = \sum_{d_1 d_2 \cdots d_k = n} f_1(d_1) f_2(d_2) \cdots f_k(d_k), \tag{16}$$

右端表示对满足条件 $d_1 d_2 \cdots d_k = n$ 的正整数组 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 求和.

利用卷积符号，Möbius 反转公式(第二章§6引理1)可表述为：设 $f \in \mathbb{A}$, $g \in \mathbb{A}$. 则

$$g = f * I \tag{17}$$

成立的充要条件是

$$f = \mu * g. \tag{18}$$

利用所证明的卷积的基本性质，及基本公式(3)，这一反转公式可十分简洁地证明. 因为若(17)式成立，则两边用 μ 作卷积，由性质(11)，(12)，(3)式及性质(10)就推出(18)式，即

$$\mu * g = \mu * (f * I) = (f * I) * \mu = f * (I * \mu) = f * u = f.$$

同样的，若式(18)成立，则两边用 I 作卷积后即得(17)式. 这就证明了这一反转公式.

由这一反转公式可看出(4)式和(5)式是等价的.

定理 2 设 h 为完全可乘函数，我们有

$$h(f * g) = (hf) * (hg)^{*)}. \tag{19}$$

---

*) hf 表示通常的函数相乘，$(hf)(n) = h(n) f(n)$.

此外，对算术函数 L，有

$$(20)\qquad L(f*g)=(Lf)*g+f*(Lg).$$

证 由完全可乘函数的定义(见第二章§2(10)式)得

$$(h(f*g))(n)=h(n)(f*g)(n)=h(n)\sum_{dr=n}f(d)g(r)$$
$$=\sum_{dr=n}h(d)f(d)h(r)g(r)=((hf)*(hg))(n).$$

这就证明了(19)式.

$$(L(f*g))(n)=\ln n\sum_{dr=n}f(d)g(r)$$
$$=\sum_{dr=n}(\ln d+\ln r)f(d)g(r)$$
$$=\sum_{dr=n}(\ln d)f(d)g(r)+\sum_{dr=n}f(d)(\ln r)g(r)$$
$$=(Lf*g)(n)+(f*(Lg))(n),$$

这就证明了(20)式. ▌

利用数学归纳法，(20)式可作如下推广(证明留给读者)：对任意正整数 m，有

$$(21)\qquad L^m(f*g)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}((L^rf)*(L^{m-r}g))$$

及

$$(22)\qquad (L^mf)*g=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}L^{m-r}(f*(L^rg)),$$

更一般的(21)式可进一步推广为

(23)

$$L^m(f_1*f_2*\cdots*f_k)$$
$$=\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=m}\frac{m!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}((L^{r_1}f_1)*(L^{r_2}f_2)*\cdots*(L^{r_k}f_k)),$$

其中 $L^0=I$.

在证明式(22)时，要把(20)式改写为

$$(Lf)*g=L(f*g)-f*(Lg).$$

然后用归纳法.

下面我们看一看(20)式的应用.当

$$f*g=u \tag{24}$$

时,由(20)式可得

$$0=Lu=(Lf)*g+f*(Lg).$$

设

$$h=(Lf)*g, \tag{25}$$

则有

$$h=-f*(Lg). \tag{26}$$

由(3)式知,我们可取 $f=I$, $g=\mu$. 这时,由(5)式可知,根据(25)式所定义的 $h=\Lambda$, (26)式就给出了公式(6).

如果在(26)式两边用 g 作卷积,则得

$$Lg=-g*h. \tag{27}$$

这公式表明:在条件(24)成立时,Lg 可用卷积来表示,其中 h 由(25)式给出. 这一点在以后是有用的.

在(24)式成立时, 利用(20)及(27)式可得到下述递推公式:设整数 $m\geqslant 0$,有

$$\begin{aligned}(L^{m+1}f)*g&=L((L^mf)*g)-(L^mf)*(Lg)\\&=L((L^mf)*g)+(L^mf)*(g*h)\\&=L((L^mf)*g)+h*((L^mf)*g),\end{aligned} \tag{28}$$

当 $m=0$ 时,这就是(25)式(即 h 的定义).反复利用这一公式,最终可把$(L^{m+1}f)*g$ 用 L 和 h 表示. 例如,当 $m=0, 1, 2, 3$ 时有

$$(Lf)*g=h,$$

$$(L^2f)*g=L((Lf)*g)+h*((Lf)*g)$$

$$=Lh+h*h,$$

$$(L^3f)*g=L((L^2f)*g)+h*((L^2f)*g)$$

$$=L^2h+L(h*h)+h*(Lh)+h*h*h$$

$$=L^2h+3(Lh)*h+h*h*h,$$

最后一步用到了(20)式，以及

$$(L^4f)*g=L^3h+4(L^2h)*h+3(Lh)*(Lh)$$

$$+6(Lh)*h*h+h*h*h*h.$$

为了更方便地求得这种表达式，我们定义如下的多元多项式：

$$(29)\quad \begin{cases} P_1(x_1)=x_1, \\ P_{m+1}(x_1,\ \cdots,\ x_{m+1})=DP_m(x_1,\ \cdots,\ x_m) \\ \qquad\qquad +x_1P(x_1,\ \cdots,\ x_m), \end{cases}$$

其中 D 代表微分算子，且规定

$$(30)\qquad Dx_r=x_{r+1}.$$

例如

$$D(3x_1^2x_2)=3(D(x_1^2))x_2+3x_1^2(Dx_2)$$

$$=6x_1x_2^2+3x_1^2x_3.$$

显然这一串多项式是完全确定的，P_m 的最高次项为 x_1^m，其系数都是正整数．我们不难算出

$$P_2(x_1,\ x_2)=x_2+x_1^2,$$

$$P_3(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_3+3x_2x_1+x_1^3,$$

$$P_4(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=x_4+4x_3x_1+3x_2^2+6x_2x_1^2+x_1^4,$$

等等．现在，我们规定 x_r 表示算术函数 $L^{r-1}h$，多项式中两个变数相乘表示它们所代表的算术函数作卷积，例如 $3x_3x_2x_1^2$ 就表示

$$3(L^2h)*(Lh)*h*h.$$

用这样的规定代入后，$P_{m+1}(x_1, \cdots, x_{m+1})$即表示$(L^{m+1}f)*g$. 不难验证前面已经列出的 $m=0, 1, 2, 3$ 的情形（留给读者验证）. 多项式的这种定义及其与算术函数的对应关系，实际上是完全由递推公式(28)及 L 的性质(20)所决定的.

下面我们举一个例子说明公式(28)的应用. 在第五章 §2(6)式中我们定义了一个算术函数 $\Lambda_2(n)$，若以 Λ_2 代表这函数，用这里的符号可表为

$$\Lambda_2=L\Lambda+\Lambda*\Lambda. \tag{31}$$

而另一方面，在(28)式中取 $m=1$, $f=I$, $g=\mu$, 这时由(25)及(5)式知 $h=\Lambda$，因而有

$$L^2*\mu=L\Lambda+\Lambda*\Lambda, \tag{32}$$

这通常称为 Selberg 恒等式. 由此知

$$\Lambda_2=L^2*\mu. \tag{33}$$

有时这也用来定义 Λ_2. 由此，可更一般地定义算术函数

$$\Lambda_m=L^m*\mu. \tag{34}$$

显见

$$\Lambda_0=u,\ \Lambda_1=\Lambda. \tag{35}$$

由式(28)得

$$\Lambda_{m+1}=L\Lambda_m+\Lambda*\Lambda_m. \tag{36}$$

由此容易看出，对任意 $m\geqslant0$，必有

$$\Lambda_m(n)\geqslant0. \tag{37}$$

定理 3 若 f 和 g 均为可乘函数，则 $f*g$ 亦为可乘函数.

证 首先证明一个关于除数分解的结果. 设 $(m, n)=1$, $d|mn$. 再设 $d_1=(d, m)$, $d_2=(d, n)$，则 $d=d_1d_2$, $(d_1, d_2)=1$. 这很容易从算术基本定理(第二章§2引理1)及其关于除数和最大公约数的两个推论(第二章§2推论1及推论2)推

出.（详细推导留给读者）．反过来，由同样的理由可证明：若 $(m,n)=l$, $d_1|m$, $d_2|n$，则 $d=d_1d_2$ 必整除 mn. 这样一来，当 $(m,n)=1$ 时，在 m 的除数 d_1 和 n 的除数 d_2 组成的数对 d_1, d_2 同 mn 的除数 d 之间建立了一个一一对应关系．因而，当 $(m,n)=1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
(f*g)(mn) &= \sum_{d|mn} f(d)g\left(\frac{mn}{d}\right) \\
&= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1d_2)g\left(\frac{mn}{d_1d_2}\right) \\
&= \sum_{d_1|m} f(d_1)g\left(\frac{m}{d_1}\right)\sum_{d_2|n} f(d_2)g\left(\frac{n}{d_2}\right) \\
&= ((f*g)(m))((f*g)(n)),
\end{aligned}
$$

这就证明了定理．▌

为了进一步研究卷积的性质，我们需要引进算术函数的逆函数的概念．

定义 2 设 $f\in\mathbb{A}$. 如果存在 $g\in\mathbb{A}$ 使得

$$f*g=u, \tag{38}$$

则称 g 为 f 的 Dirichlet 逆函数（简称逆函数），记作 $g=f^{-1}$ *).

定理 4 设 $f\in\mathbb{A}$. f 有逆函数的充要条件是：$f(1)\neq 0$. 当 f 有逆函数时，它的逆函数是唯一的，由以下递推公式给出：

$$
\begin{cases}
f^{-1}(1)=\dfrac{1}{f(1)}; \\
f^{-1}(n)=\dfrac{-1}{f(1)}\displaystyle\sum_{\substack{dr=n\\ r<n}} f(d)f^{-1}(r), \quad n>1.
\end{cases} \tag{39}
$$

---

*) 在本章中，当 f 是算术函数时，f^{-1} 均表示其逆函数，而不是 $1/f$.

证 若 f 有逆函数 g, 则由

$$1=u(1)=f(1)g(1)$$

推出 $$f(1)\neq 0.$$

如果它还有逆函数 g': $f*g'=u$. 两端用 g 作卷积得（利用定理 1 的性质）

$$g=u*g=g*(f*g')=(g*f)*g'=u*g'=g'.$$

这就证明了唯一性. 下面证充分性: 当 $f(1)\neq 0$ 时, 由递推公式(39)确定了一个算术函数 $f^{-1}(n)$. （这时我们还不知道它是逆函数!）. 由这公式知,

$$1=f(1)f^{-1}(1),$$

$$0=f(1)f^{-1}(n)+\sum_{\substack{dr=n\\ r<n}}f(d)f^{-1}(r)$$

$$=\sum_{dr=n}f(d)f^{-1}(r),\ (n>1).$$

这就是

$$u=f*f^{-1}.$$

所以这样确定的函数 $f^{-1}(n)$ 的确是 f 的逆函数. ∎

定理 5 (a)若 $f^{-1}=g$, 则 $g^{-1}=f$;

(40) (b) $(f*g)^{-1}=(f^{-1})*(g^{-1})$;

(c)若 f 是不恒等于零的可乘函数, 则 f^{-1} 存在且亦是可乘函数; (d)若 f, $f*g$ 都是可乘函数, 则 g 亦是可乘函数.

证 性质(a)和(b)是定义和卷积的性质(10)、(11)及(12)的显然推论. 现在证明(c). 由于不恒等于零的可乘函数必有 $f(1)=1$, 故由定理 4 知 f^{-1} 存在, 且 $f^{-1}(1)=1$. 下面用数学归纳法来证明 f^{-1} 的可乘性. 当 $(m,n)=1$, $mn=1$ 时, 显然有

$$f^{-1}(mn)=f^{-1}(m)f^{-1}(n) \tag{41}$$

成立. 现设 $k\geqslant 2$, 且当$(m, n)=1$, $mn<k$ 时, (41)式成立, 则当$(m, n)=1$, $mn=k$ 时, 由(39)式[*)]及归纳假设知:

$$
\begin{aligned}
(42)\qquad f^{-1}(mn) &= -\sum_{\substack{d\mid mn\\ d>1}} f(d)f^{-1}\left(\frac{mn}{d}\right)\\
&= -\sum_{\substack{d_1\mid m\\ d_1d_2>1}}\sum_{d_2\mid n} f(d_1d_2)f^{-1}\left(\frac{mn}{d_1d_2}\right)\\
&= -\sum_{\substack{d_1\mid m\\ d_1d_2>1}}\sum_{d_2\mid n} f(d_1)f(d_2)f^{-1}\left(\frac{m}{d_1}\right)f^{-1}\left(\frac{n}{d_2}\right)\\
&= -\sum_{\substack{d_1\mid m\\ d_1>1}} f(d_1)f^{-1}\left(\frac{m}{d_1}\right)f^{-1}(n)\\
&\quad -\sum_{\substack{d_2\mid n\\ d_2>1}} f(d_2)f^{-1}\left(\frac{n}{d_2}\right)f^{-1}(m)\\
&\quad -\sum_{\substack{d_1\mid m\\ d_1>1}} f(d_1)f^{-1}\left(\frac{m}{d_1}\right)\sum_{\substack{d_2\mid n\\ d_2>1}} f(d_2)f^{-1}\left(\frac{n}{d_2}\right)\\
&= f^{-1}(m)f^{-1}(n)+f^{-1}(m)f^{-1}(n)\\
&\quad -f^{-1}(m)f^{-1}(n)=f^{-1}(m)f^{-1}(n),
\end{aligned}
$$

这就证明了(c), 其中除数 d 分解为 d_1d_2 和定理 3 的证明中相同.

由于 $g=f^{-1}*(f*g)$, 由(c)及定理 3 就证明了(d). ∎

§2 广义 Dirichlet 卷积

以 ℝ 表示由全体定义在 $x\geqslant 1$ 上的函数组成的集合. 本节利用本章 §1 表 1 中规定的符号.

定义 1 设 $f\in\mathbb{A}$, $F\in\mathbb{R}$. 我们把由等式

---

*) 容易看出(39)式可改写为(42)式的形式.

(1) $$G(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\quad(x\geqslant 1),$$

定义的函数 $G\in\mathbb{R}$ 称为是 f 和 F 的广义 Dirichlet 卷积(简称广义卷积),记作

(2) $$G=f\circ F,$$

或

(3) $$G=S_f(F).$$

这样, F 的广义 Möbius 变换就可表为

(4) $$I\circ F\quad 或\quad S_I(F).$$

而第二章 § 7 中的(3)式和(7)式*) 即可表为

(5) $$T=I\circ\psi=S_I(\psi)$$

和

(6) $$\psi=\mu\circ T=S_\mu(T),$$

其中

(7) $$T(x)=\ln([x]!)\quad(x\geqslant 1).$$

广义卷积的两种写法(2) 和 (3) 在使用中各有优点. 当我们要连续进行多次广义卷积运算时, 写法(3)比较方便, 下面主要用这种写法. 这种写法实际上是把广义卷积看作为集合 $\mathbb{R}$ 到它自身的一个由 f 确定的映射 S_f. 为了统一起见, 我们把 $\mathbb{R}$ 中的函数的普通乘法也看作为 $\mathbb{R}$ 到它自身的映射, 即设 $H\in\mathbb{R}$是一给定的函数, 对任一 $F\in\mathbb{R}$ 作乘积 $G=HF$, 这样就确定了 $\mathbb{R}$ 中的一个由函数 H 所确定的映射:

$$F\xrightarrow{H}G,\ F\in\mathbb{R},$$

记作

$$G=H(F)=HF.$$

上式中的第一个 H 就代表一个映射, 第二个 H 表示一个函

*) 这两个公式是可以独立证明的.

数，这两种意义是不会混淆的，而且实际上是一样的．以后关于映射的相加、相乘及乘幂的含意及表示与一般集合论中所使用的相同．例如

$$S_{f_1}+S_{f_2},\ S_f+H$$

均表示两个映射相加，即

$$(S_{f_1}+S_{f_2})(F)=S_{f_1}(F)+S_{f_2}(F),$$

$$(S_f+H)(F)=S_{f_1}(F)+H(F);$$

而

$$S_{f_1}S_{f_2},\quad S_fH^{*)}$$

表示两个映射相乘，即

$$(S_{f_1}S_{f_2})(F)=S_{f_1}(S_{f_2}(F));$$

$$(S_fH)(F)=S_f(H(F)).$$

关于乘幂，我们规定 S_f^0、H^0 均表示恒等映射**)，即

$$S_f^0(F)=F,\ H^0(F)=F.$$

一般的

$$S_f^n=\overbrace{S_fS_f\cdots S_f}^{n\text{个}},\quad (n\geqslant 1);$$

$$H^n=\overbrace{H\ H\cdots H}^{n\text{个}},\quad (n\geqslant 1).$$

由广义卷积的定义立即可证明以下的基本性质：

定理 1 (a)若对任意的 $F\in\mathbb{R}$，有 $S_f(F)=S_g(F)$，则必有 $f\equiv g$; (b)分配律：对任意复数 c_1、c_2，有

$$S_{c_1f_1+c_2f_2}=c_1S_{f_1}+c_2S_{f_2},\ f_1\in\mathbb{A},\ f_2\in\mathbb{A}, \tag{8}$$

$$S_f(c_1F_1+c_2F_2)=c_1S_f(F_1)+c_2S_f(F_2), \tag{9}$$

$$f\in\mathbb{A},\ F_1\in\mathbb{R},\ F_2\in\mathbb{R},$$

---

*) 注意 S_fH 和 $S_f(H)$不同．

**) 我们不考虑 $f=0$ 或 $H=0$ 的情形．

即

(8′) $$(c_1f_1+c_2f_2)\circ F=c_1(f_1\circ F)+c_2(f_2\circ F),$$

(9′) $$f\circ(c_1F_1+c_2F_2)=c_1(f\circ F_1)+c_2(f\circ F_2).$$

(c) S_u 是恒等映射，即

(10) $$S_u(F)=F,\ F\in\mathbb{R},$$

亦即 u 是广义卷积的单位.

(10′) $$u\circ F=F.$$

(d) 对 $f\in\mathbb{A}$, $g\in\mathbb{A}$, 有

(11) $$S_fS_g=S_gS_f=S_{f*g},$$

即

(11′) $$f\circ(g\circ F)=g\circ(f\circ F)=(f*g)\circ F,$$

一般的，对 $f_1\in\mathbb{A}$, $f_2\in\mathbb{A}$, $\cdots$, $f_k\in\mathbb{A}$, 有*)

(12) $$S_{f_1}S_{f_2}\cdots S_{f_k}=S_{f_1*f_2*\cdots*f_k}.$$

证　性质(a)、(b)和(c)由定义 1 直接验证即得.

因而

(13) $$S_f^0=S_u.$$

下面证明性质(d). 对任意的 $F\in\mathbb{R}$, 由映射乘法的定义知

$$(S_fS_g)(F)=S_f(S_g(F)).$$

所以，由定义 1 知

$$\begin{aligned}((S_fS_g)(F))(x)&=(S_f(S_g(F)))(x)\\&=\sum_{n\leq x}f(n)(S_g(F))\left(\frac{x}{n}\right)\\&=\sum_{n\leq x}f(n)\sum_{m\leq\frac{x}{n}}g(m)F\left(\frac{x}{mn}\right)\\&=\sum_{l\leq x}\left(\sum_{mn=l}f(n)g(m)\right)F\left(\frac{x}{l}\right)\end{aligned}$$

---

*) 这一公式清楚地表明写法(3)的优点，如利用写法(2)将出现 k 重括号，用起来很不方便。

$$=\sum_{l<x}(f*g)(l)F\left(\frac{x}{l}\right)=(S_{f*g}(F))(x),$$

由此及 $f*g=g*f$ 就证明了(11)式. 利用归纳法由(11)式就推出(12)式. ∎

利用广义卷积符号, 广义 Möbius 反转公式(即第二章§6引理3)可表述为: 设 $F\in\mathbb{R}$, $G\in\mathbb{R}$. 则

(14) $$G=S_I(F)=I\circ F$$

成立的充要条件是

(15) $$F=S_\mu(G)=\mu\circ G.$$

这一结果利用定理1中所证明的性质(b)和(c)能十分简洁地证明. 若(14)式成立, 则由(11)式、§1(3)式及(10)式得

$$S_\mu(G)=S_\mu(S_I(F))=(S_\mu S_I)(F)=S_{\mu*I}(F)$$
$$=S_u(F)=F.$$

这就证明了(15)式. 反过来, 可同样证明.

广义卷积的另一个重要性质是

定理 2

(16) $$LS_f=S_{fL}+S_fL.$$

即对任意的 $F\in\mathbb{R}$, 有

(16′) $$L(f\circ F)=(Lf)\circ F+f\circ(L(F))^{*)}.$$

证 由定义知

$$(L(f\circ F))(x)=\ln x\sum_{n\le x}f(n)F\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$=\sum_{n\le x}(f(n)\ln n)F\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$+\sum_{n\le x}f(n)\left(\ln\frac{x}{n}F\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$
$$=(S_{fL}(F))(x)+(S_fL(F))(x),$$

*) 请读者注意区别符号"L"在这两式中出现在三个不同位置的含意.

这就证明了(16)式. ∎

这定理表明: 映射乘积 LS_f 一般说来是不可交换的, 即

$$LS_f \neq S_f L.$$

利用数学归纳法, 由定理 2 可推出: 对任意整数 $m\geqslant 0$, 有

$$L^m S_f=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}S_{L^r f}L^{m-r}, \tag{17}$$

$$S_f L^m=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}L^{m-r}S_{fL^r}, \tag{18}$$

以及

$$S_{fL^m}=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}L^{m-r}S_f L^r. \tag{19}$$

在证明(18)和(19)式时, 要把(16)式分别改写为

$$S_f L=LS_f-S_{Lf},$$

及
$$S_{fL}=LS_f-S_f L.$$

具体推导留给读者.

当 $f*g=u$ 时, 相应于$(L^m f)*g$ 用 L 和 h(见§1(25)式)表示的结果(见§1中(24)式至(31)式), 下面证明一个以后要用到的结果.

定理 3 设 $f\in\mathbb{A}$, $g\in\mathbb{A}$, $f*g=u$. 再设 h 由§1(25)式给出. 则对任意的整数 $m\geqslant 1$, 有

$$S_{fL^m}S_g=P_m(S_h,\ S_{hL},\ \cdots,\ S_{hL^{m-1}}), \tag{20}$$

及

$$S_f S_{gL^m}=P_m(-S_h,\ -S_{hL},\ \cdots,\ -S_{hL^{m-1}}). \tag{21}$$

其中 $P_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$是由§1(29)式给出的 m 元 m 次正系数多项式.

证　由§1(11)式知 $S_{fL^m}S_g=S_{(fL^m)*g}$. 再由上一节中规定的如何由多项式 $P_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$得到$(fL^m)*g$ 的方法,

就可立即得到(20)式. 若设

(22) $$h'=(Lg)*f,$$

则由(20)式及§1(11)式得

(23) $$S_f S_{gL^m}=S_{gL^m}S_f=P_m(S_{h'},\ S_{h'L},\ \cdots,\ S_{h'L^{m-1}}).$$

注意到由§1(20)式可得

$$0=Lu=L(f*g)=(Lf)*g+f*(Lg),\ \text{即}h'=-h.$$

因而由(8)式得

$$S_{h'L^r}=S_{-hL^r}=-S_{hL^r}\quad(r=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$$

由此及(23)式即推出(21)式. ∎

利用广义卷积的性质, 也可给 Tatuzawa-Iseki 的引理(即第五章§2引理1)以一个简洁的证明. 用这里的符号, 该引理可表述为: 设 $F\in\mathbb{R}$, $G\in\mathbb{R}$, 且 $F(1)=G(1)$. 则

(24) $$G=S_I(F)$$

成立的充要条件是:

(25) $$L(F)+S_\Lambda(F)=(S_\mu L)(G).$$

证明如下: 若(24)式成立, 则由(16)式、§1的(5)与(3)式及(10)式得

$$\begin{aligned}(S_\mu L)(G)&=(S_\mu L)(S_I(F))=(S_\mu LS_I)(F)\\&=(S_\mu(S_L+S_IL))(F)=(S_\mu S_L)(F)+(S_\mu S_IL)(F)\\&=S_{\mu*L}(F)+(S_\mu S_I)(L(F))=S_{\mu*L}(F)+S_{\mu*I}(L(F))\\&=S_\Lambda(F)+S_u(L(F))=S_\Lambda(F)+L(F),\end{aligned}$$

这就证明了(25)式. 反过来, 可同样证明.

最后, 我们引进映射 S_f 的负次幂的概念. 若算术函数 f 有逆函数 f^{-1}(见§1定义2), 则定义

(26) $$S_f^{-1}=S_{f^{-1}},\ S_f^{-n}=(S_f^{-1})^n\quad(n\geqslant0).$$

由于逆函数若存在, 一定是唯一的, 所以这个定义是唯一确定的. 由定理1中的性质(b)、(c)及(13)式容易证明: 这样定义

负指数以后映射的指数运算都成立，即对所有的整数 m、n 及 k 有

(27) $$S_f^m S_f^n = S_f^{m+n},$$

(28) $$(S_f^m)^k = S_f^{mk}.$$

(证明留给读者). 特别的，由 §1(3)式知

(29) $$S_\mu^{-1} = S_I,\ S_I^{-1} = S_\mu.$$

本节及上节的结果和例子表明了引进卷积和广义卷积的概念与符号的优点. 它不仅避免了多重和号在书写上的不方便与容易出现错误，而且更重要的是可清楚地看出这些关系式的本质和相互联系，使我们便于作各种推广和得到进一步的性质. 读者若有兴趣，可以把前几章的结果和推导用这里引进的符号表达，你将会发现在许多地方这样做是有益处的.

§3 映射类 $\mathscr{B}_{h,n}$

定义 1 一个广义卷积映射 S_f 称为是正规的，如果它可表为

(1) $$S_f = S_\mu^\alpha \prod_{r=1}^{R} S_{L^r}^{\alpha_r},$$

其中 α 为整数，$\alpha_r (1 \leqslant r \leqslant R)$ 为非负整数，且满足条件

(2) $$\sum_{r=1}^{R} \alpha_r - \alpha \geqslant 0.$$

α 称为正规映射 S_f 的级，记作 $\delta(f)$，把

(3) $$\rho(f) = \sum_{r=1}^{R} (r+1)\alpha_r - \alpha$$

称为 S_f 的权.

当 $\alpha \geqslant 0$ 时，

(4) $$f=\underbrace{(\mu*\cdots*\mu)}_{\alpha\text{ 个}}*\underbrace{(L*\cdots*L)}_{\alpha_1\text{ 个}}*\cdots*\underbrace{(L^R*\cdots*L^R)}_{\alpha_R\text{ 个}},$$

当 $\alpha<0$ 时，由 § 2 中(26)及(29)式知，

(5) $$f=\underbrace{(I*\cdots*I)}_{-\alpha\text{ 个}}*\underbrace{(L*\cdots*L)}_{\alpha_1\text{ 个}}*\cdots*\underbrace{(L^R*\cdots*L^R)}_{\alpha_R\text{ 个}}.$$

正规映射具有以下性质：

定理 1

(6) $$\rho(f)\geqslant\delta(f);$$

(7) $$\rho(f)\geqslant 0,$$

其中等号当且仅当 $\alpha=\alpha_1=\cdots=\alpha_R=0$ 时才成立，即 $f=u$ 时才成立.

证 由(2)式、(3)式及 $\alpha_r\geqslant 0$ 知

$$\rho(f)=\sum_{r=1}^{R}(r+1)\alpha_r-\alpha\geqslant\sum_{r=1}^{R}r\alpha_r\geqslant\sum_{r=1}^{R}\alpha_r\geqslant\alpha.$$

这就证明了(6)式. 若 $\rho(f)=0$，则由上式知 $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=0$，进而推出 $\alpha=0$. ▌

定理 2 若 S_f 是正规映射，则 $f(n)\geqslant 0$.

证 当 $\alpha<0$ 时，由式(5)及 $I(n)=1$，$(\ln n)^r\geqslant 0$ 即得 $f(n)\geqslant 0$. 当 $\alpha\geqslant 0$ 时，由 §1(34)式知，S_f 可写为

$$S_f=S_\mu^{(\alpha-\alpha_1-\cdots-\alpha_R)}\prod_{r=1}^{R}(S_\mu S_{L^r})^{\alpha_r}$$

$$=S_I^{\alpha_1+\cdots+\alpha_R-\alpha}\prod_{r=1}^{R}S_{\Lambda_r}^{\alpha_r}.$$

由(2)式知最后一式的指数均为正，由 § 1(37)式知 $\Lambda_r(n)\geqslant 0$，因而亦得 $f(n)\geqslant 0$. ▌

我们所要讨论的映射是正规映射的线性组合. 更确切些说是下面定义的映射类 $\mathscr{B}_{h,n}$.

定义 2 设整数 $h\geqslant 0$，$n\geqslant h$. 由全体权 $\leqslant n$，级 $\leqslant h$ 的正

规映射的线性组合所组成的集合称为映射类 $\mathscr{B}_{h,n}$.

容易证明映射类 $\mathscr{B}_{h,n}$ 有以下性质:

定理 3 若 S_f、S_g 均为正规映射, 则 $S_fS_g=S_{f*g}$ 亦是正规映射, 且

(8) $$\delta(f*g)=\delta(f)+\delta(g);$$

(9) $$\rho(f*g)=\rho(f)+\rho(g).$$

由定义直接验证即得. 详细证明留给读者.

定理 4 (a)若 $h_2\geqslant h_1$, $n_2\geqslant n_1$, 则

$$\mathscr{B}_{h_1,n_1}\subseteq\mathscr{B}_{h_2,n_2}.$$

(b)若 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$, 则一定存在 $S_g\in\mathscr{B}_{h,n}$, 使得

$$|f(m)|\leqslant g(m)\quad(m=1,\ 2,\ \cdots).$$

(c)若 $S_{f_1}\in\mathscr{B}_{h_1,n_1}$, $S_{f_2}\in\mathscr{B}_{h_2,n_2}$, 则

$$S_{f_1}S_{f_2}\in\mathscr{B}_{h_1+h_2,n_1+n_2}.$$

证 (a)是显然的. 若 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$, 则由定义知存在权 $\leqslant n$, 级 $\leqslant h$ 的正规映射 S_{f_1}, S_{f_2}, $\cdots$, S_{f_l}, 使得

$$S_f=c_1S_{f_1}+c_2S_{f_2}+\cdots+c_lS_{f_l}=S_{c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_lf_l},$$

最后一步用到了 § 2 (8) 式. 现取 $g=|c_1|f_1+|c_2|f_2+\cdots+|c_l|f_l$. 由定理 2 知 $f_j(m)\geqslant0$, 所以满足 $|f(m)|\leqslant g(m)$. 而由 § 2(8)式知

$$S_g=|c_1|S_{f_1}+|c_2|S_{f_2}+\cdots+|c_l|S_{f_l}.$$

所以 $S_g\in\mathscr{B}_{h,n}$. 这就证明了(b). 性质(c)当 f_1, f_2 为正规映射时, 由定理 3 立即推出, 因而由映射的乘法知对一般情形亦成立. ▌

定理 5 若 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$, 则对整数 $m\geqslant1$, 有

$$S_{fL^m}\in\mathscr{B}_{h+m,n+m}.$$

证 显然只要讨论 $m=1$ 及 S_f 是正规映射的情形. 为方便起见, 对任意的 $g_1\in\mathbb{A}$, $g_2\in\mathbb{A}$, 我们定义

(10) $$(S_{g_1})_{g_2}=S_{g_1}S_{g_2}.$$

这样，设 S_f 由(1)式给出，当 $\alpha\geqslant 0$ 时，由卷积的性质(§1(23)式，式中 $m=1$)得

(11) $$S_{fL}=\left(S_\mu^\alpha\prod_{p=1}^R S_{L^r}^{\alpha_r}\right)_L=(S_\mu^\alpha)_L\prod_{r=1}^R S_{L^r}^{\alpha_r}+S_\mu^\alpha\left(\prod_{r=1}^R S_{L^r}^{\alpha_r}\right)_L$$
$$=S_{f_1}+S_{f_2}.$$

再由卷积性质(§1(23)式，式中 $m=1$)得：当 $\alpha\geqslant 0$ 时，有

(12) $$(S_\mu^\alpha)_L=\alpha S_\mu^{\alpha-1}S_{\mu L}=-\alpha S_\mu^\alpha S_\Lambda=-\alpha S_\mu^{\alpha+1}S_L.$$

这里用到了由§1中(3)、(5)、(6)式推出的下式：

(13) $$\mu L=-\Lambda*\mu=-\mu*\mu*L.$$

因而，不难得到

(14)

$$S_{f_1}=-\alpha S_\Lambda S_f=-\alpha S_\mu^{\alpha+1}S_L^{\alpha_1+1}\prod_{r=2}^R S_{L^r}^{\alpha_r}\in\mathscr{B}_{h+1,n+1}.$$

同样由卷积性质(§1(23)式，式中 $m=1$)得

(15) $$S_{f_2}=\sum_{r=1}^R\alpha_r S_\mu^\alpha S_{L^r}^{\alpha_r-1}S_{L^{r+1}}^{\alpha_{r+1}+1}\prod_{i\neq r,r+1}S_{L^i}^{\alpha_i},$$

不难直接验证上式右端和式中的每一个映射均为正规映射*)，且级 $=\alpha$，权 $=\rho(f)+1$，所以

(16) $$S_{f_2}\in\mathscr{B}_{h,n+1}.$$

由(14)及(16)式就证明了当 $\alpha\geqslant 0$ 时定理成立.

当 $\alpha<0$ 时，不难验证(12)式仍然成立(利用§2(29)与(26)式)，所以结论亦成立. ▌

下面证明 $\mathscr{B}_{h,n}$ 类中的映射的一个重要性质，它是证明一般的 Selberg 不等式的基础.

定理 6 设 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$，则对任意整数 $m\geqslant 0$ 有

*) $\alpha_r=0$ 时的项不出现.

(17) $$S_{fL^{m+1}}+h\binom{h+m}{h}S_{\Lambda L^m}S_f\in\mathscr{B}_{h+m,n+m+1}.$$

证 由定义知 S_f 为级 $\leqslant h$, 权 $\leqslant n$ 的正规映射 S_g 的线性组合. 若 S_g 的级 $\leqslant h-1$, 则由定理 5 知 $S_{gL^{m+1}}\in\mathscr{B}_{h+m,n+m+1}$. 此外由 § 1(5)式知

(18) $$S_\Lambda=S_\mu S_L\in\mathscr{B}_{1,1}.$$

所以由定理 5 及定理 4(c)知

$$S_{\Lambda L^m}S_g\in\mathscr{B}_{h+m,n+m+1}.$$

所以对这样的 S_g 定理成立. 因而我们只要对 S_f 是级 $\delta(f)=h$ 的正规映射来证明定理.

现设 S_f 由(1)式给出, $\delta(f)=\alpha=h$, $\rho(f)\leqslant n$. 当 $m=0$ 时, 由(11)、(12)及(16)式得

$$\mathscr{B}_{h,n+1}\ni S_{f_2}=S_{fL}-S_{f_1}=S_{fL}+hS_\Lambda S_f.$$

所以(17)式成立. 现设 $m\geqslant1$, (17)式对 $<m$ 及任意正规映射均成立. 由(10)、(11)式得

(19) $$S_{fL^{m+1}}=(S_{fL})_{L^m}=(S_{f_1})_{L^m}+(S_{f_2})_{L^m}.$$

由(14)式知 S_{f_1} 亦是正规映射 $\delta(f_1)=\alpha+1=h+1$, $\rho(f_1)\leqslant n+1$, 故由归纳假设得

(20) $$S_{f_1L^m}+(h+1)\binom{h+m}{h+1}S_{\Lambda L^{m-1}}S_{f_1}$$
$$=S_{f_1L^m}-h(h+1)\binom{h+m}{h+1}(S_\Lambda S_{\Lambda L^{m-1}})S_f\in\mathscr{B}_{h+m,n+m+1}.$$

另一方面对 S_Λ 用归纳假设得(注意 $\delta(\Lambda)=\rho(\Lambda)=1$):

(21) $$S_{\Lambda L^m}+mS_{\Lambda L^{m-1}}S_\Lambda\in\mathscr{B}_{m,m+1}.$$

因而由定理 4(c)知

(22) $$S_{\Lambda L^m}S_f+m(S_\Lambda S_{\Lambda L^{m-1}})S_f\in\mathscr{B}_{h+m,n+m+1}.$$

由此及(20)式得

$$S_{f_1,L^m}+h\binom{h+m}{h}S_{\Lambda L^m}S_f\in\mathscr{B}_{h+m,n+m+1}. \tag{23}$$

由(16)式及定理 4(c)知

$$S_{f_2L^m}\in\mathscr{B}_{h+m,n+m+1}. \tag{24}$$

这样，从(19)、(23)及(24)式推出(17)式对 m 亦成立，故由归纳法就证明了定理. ∎

当取 $f=\Lambda$，并以 m 代 $m+1$ 时，(17)式即(21)式. 它对 $m\geqslant1$ 均成立. 当 $m=1$ 时，(21)式实际上就是 Selberg 恒等式(§1(32)式)所证明的结论. 所以(21)式也称为一般的 Selberg 公式.

定理 6 有下面的推论:

推论 1 在定理 6 的条件下，对整数 $m\geqslant0$，有

$$S_{fL^{m+1}}-\binom{h+m}{m+1}S_{\mu L^{m+1}}S_IS_f\in\mathscr{B}_{h+m,n+m+1}. \tag{25}$$

证 显然，只要证明: 对 $m\geqslant0$，有

$$(m+1)S_{\Lambda L^m}+S_{\mu L^{m+1}}S_I\in\mathscr{B}_{m,m+1}. \tag{26}$$

利用定理 4(c)由此从(17)式即推出(25)式.

在 §1(28)式中取 $f=\mu$, $g=I$, 这时 $h=-\mu*L=-\Lambda$，从而得到: 对 $m\geqslant0$，有

$$S_{\mu L^{m+1}}S_I=(S_{\mu L^m}S_I)_L-S_{\mu L^m}S_IS_\Lambda. \tag{27}$$

现用归纳法证明(26)式. 当 $m=0$ 时，由(6)式知(26)式的左端等于零，当然成立. 现设 $m\geqslant1$ 及(26)式对 $<m$ 均成立，令

$$S_{\mu L^m}S_I+mS_{\Lambda L^{m-1}}=S_g\in\mathscr{B}_{m-1,m}. \tag{28}$$

由此及(27)式得

$$
\begin{aligned}
S_{\mu L^{m+1}} S_I &= (-mS_{\Lambda L^{m-1}} + S_g)_L + (mS_{\Lambda L^{m-1}} + S_g) S_\Lambda \\
&= -mS_{\Lambda L^m} + mS_{\Lambda L^{m-1}} S_\Lambda + S_{gL} + S_g S_\Lambda.
\end{aligned}
$$

由此及式(21)、(28)、(18)式,定理 4(c) 及定理 5 即得(26)式. 这就证明了(25)式. ∎

(25)式是十分重要的, 它是证明一般的 Selberg 不等式的基础. 它表明映射 $S_{fL^{m+1}}$ 的主项是

$$\binom{h+m}{m+1} S_{\mu L^{m+1}} S_I S_f.$$

下面两节要具体计算广义 Dirichlet 卷积. 我们所感兴趣的是 $S_f \in \mathscr{B}_{h,n}$, 而 F 是对数多项式:

$$a_0 + a_1 L + \cdots + a_k L^k. \tag{29}$$

我们把集合 $\mathbb{R}$ 中所有形如(29)式的对数多项式组成的子集记作 $\mathbb{R}_L$. 为此, 先要计算一个新的映射

$$T_f = S_{f/N}, \tag{30}$$

其中 N 表算术函数 $N(n) = n$(见 § 1 中表 1). 容易证明 S_f 所有的性质: § 2 中定理 1～定理 3 对 T_f 亦成立. 在证明其中有些性质时, 要用到卷积的性质 § 1(19)式, 即

$$\frac{1}{N}(f * g) = \left(\frac{f}{N}\right) * \left(\frac{g}{N}\right). \tag{31}$$

因为 $\dfrac{1}{N}$ 是完全可乘函数.

§ 4 T_f 的计算

本节要计算

$$T_f(\Phi) = \sum_{n \le x} \frac{f(n)}{n} \Phi\left(\frac{x}{n}\right), \Phi \in \mathbb{R}_L, \ S_f \in \mathscr{B}_{h,n}, \tag{1}$$

得到它的一个渐近公式. 由此以后, $T_f(\Phi)$ 也表示 $(T_f(\Phi))(x)$, 同样的, H、$S_f(\Phi)$ 分别表示 $H(x)$、$(S_f(\Phi))(x)$. 这样写起来可简单些, 但如果要取不同的值时, 就要表出 x, y, $\cdots$.

由于可加性, 我们只要讨论 S_f 是由 § 3(1)式给出的正规映射的情形, 而 $\Phi=L^k(k\geqslant 0)$. 这时由 § 3(31)式知

$$T_f=T_\mu^\alpha\prod_{r=1}^R T_{L^r}^{\alpha_r}. \tag{2}$$

显然, 这里的基本映射是

$$T_\mu,\ T_{L^r}, T_\mu^{-1}=T_I, \tag{3}$$

T_f 是它们的乘积. 我们先计算这些基本映射, 然后由一个一般性定理得到计算 T_f 的方法.

由第三章 § 1 中引理 3、引理 4 及第六章 § 3 中的引理 2 立即得到

定理 1 对整数 $r\geqslant 0$, $k\geqslant 1$, 有

$$T_{L^r}(I)=\frac{1}{r+1}L^{r+1}+(-1)^r\gamma_r+O\left(\frac{L^r}{x}\right); \tag{4}$$

$$T_{L^r}(L^k)=\frac{r!\,k!}{(r+k+1)!}L^{r+k+1}+(-1)^r\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\gamma_{r+m}L^{k-m}+O\left(\frac{L^{r+k}}{x}\right), \tag{5}$$

其中 $\gamma_0=\gamma$;

$$T_\mu(I)=O(1); \tag{6}$$

$$T_\mu(L)=O(1). \tag{7}$$

证 不难看出, (4)式就是第三章 § 1 中(12)和(16)式; (6)式和(7)式分别就是第 6 章 § 3 中(13)式和(14)式. 所以我们只要证明(5)式. 由(4)式及 § 2(18)式得

$$T_{L^r}(L^k)=(T_{L^r}L^k)(I)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}L^{k-m}T_{L^{r+m}}(I)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}L^{k-m}\frac{L^{r+m+1}}{r+m+1}$$

$$+(-1)^r\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\gamma_{r+m}L^{k-m}+O\left(\frac{L^{r+k}}{x}\right).$$

由此及

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\frac{1}{r+m+1}=\int_0^1\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}x^{r+m}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^r(1-x)^k dx=\frac{r!\,k!}{(r+k+1)!}$$

即得(5)式. ▌

注 这里可以不用§2(18)式对 T_f 这一性质亦成立，可直接证明(5)式. 我们有

$$T_{L^r}(L^k)=\sum_{n<x}\frac{\ln^r n}{n}\ln^k\frac{x}{n}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\ln^{k-m}x\sum_{n<x}\frac{\ln^{r+m}n}{n},$$

由此再用(4)式，亦得(5)式.

在上面所得到的四个基本渐近公式中，(5)式是比较复杂的，为了计算 T_f 就要连续的应用这些公式，其结果将是很复杂的. 所以我们就有必要来寻求这些公式的一个合适的表达形式，以便较为容易地求出 T_f 的渐近公式.

为此，我们引进对数微分算子

(8) $$D=\frac{d}{dL}.$$

显然有

(9) $$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dL}\cdot\frac{dL}{dx}=\frac{1}{x}Df.$$

这样就有

(10) $$DL^k=kL^{k-1}\quad(k\geqslant 0).$$

我们规定

(11) $$D^0L^k=L^k,\ D^{m+1}L^k=D(D^{m-1}L^k)\quad(k\geqslant 0,\ m\geqslant 1),$$

(12) $$D^{-1}(L^k)=\frac{1}{k+1}L^{k+1}\quad(k\geqslant 0).$$

容易验证对任意整数 m，有

(13) $$D^mL^k=\frac{k!}{(k-m)!}L^{k-m}\quad(k\geqslant m,\ k\geqslant 0),$$

及

(14) $$D^mL^k=0\quad(m>k\geqslant 0).$$

利用所引进的符号及结果，(5)式（当 $k=0$ 时，就是式(4)）可写为：对 $k\geqslant 0$，$r\geqslant 0$ 有

(15) $$T_{L^r}(L^k)=r!D^{-r-1}L^k$$
$$+(-1)^r\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\gamma_{r+m}D^mL^k+O\left(\frac{L^{r+k}}{x}\right)$$
$$=r!D^{-r-1}L^k+(-1)^r\sum_{m=r}^{k+r}\frac{\gamma_m}{(m-r)!}D^{m-r}L^k$$
$$+O\left(\frac{L^{r+k}}{x}\right)=(-1)^r\Big\{(-1)^r r!D^{-r-1}L^k$$
$$+\sum_{m=r}^{\infty}\frac{\gamma_m}{(m-r)!}D^{m-r}L^k\Big\}+O\left(\frac{L^{r+k}}{x}\right),$$

最后一步用到了(14)式，所以最后一式中的无穷级数实际上是一有限和.

我们再引进对数微分算子 D 的形式 Laurent 级数*)

$$(16) \qquad H(D)=D^{-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma_m}{m!}D^m,$$

如同形式幂级数一样，我们约定可以对它进行各种运算．例如，对 $r\geqslant 0$，有

(17)

$$\frac{d^r}{dD^r}H(D)=H^{(r)}(D)=(-1)^r r!D^{-r-1}+\sum_{m=r}^{\infty}\frac{\gamma_m}{(m-r)!}D^{m-r}.$$

而它的倒数

(18)

$$H^{-1}(D)=\frac{1}{H(D)}=D\left(1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma_m}{m!}D^{m+1}\right)^{-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m D^m,$$

由于 $H^{-1}(D)H(D)\equiv 1$，故系数 β_m 可由递推公式

$$(19) \qquad \beta_1=1,\ \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\gamma_k}{k!}\beta_{m-k}+\beta_{m+1}=0 \quad (m\geqslant 1)$$

确定．特别有

$$(20) \qquad \beta_2=-\gamma_0=-\gamma<0.$$

还比如

$$(21) \qquad (H^{-1}(D))'=H^{-2}(D)H'(D),$$

等等．

这样，由(15)及(17)式知，(15)式可进一步写为：当 $r\geqslant 0$, $k\geqslant 0$ 时，有

$$(22) \qquad T_{L^r}(L^k)=(-1)^r H^{(r)}(D)L^k+O\left(\frac{L^{r+k}}{x}\right).$$

---

*) 在后面第八章 § 2(6) 可看到：$H(s)=\zeta(1+s)$．但在这里不需要这结果．

由于形式 Laurent 级数便于进行各种运算，上式就是我们所需要的表达形式，它适宜于用来进一步计算一般的 $T_f(\Phi)$，$S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$，$\Phi\in\mathbb{R}_L$.

由于可加性，当 $\Phi\in\mathbb{R}_L$ 是 k 次对数多项式时，则由(22)式可得:

当 $r\geqslant 0$，$k\geqslant 0$ 时，

$$T_{L^r}(\Phi)=(-1)^r H^{(r)}(D)\Phi+O\left(\frac{L^{r+k}}{x}\right), \tag{23}$$

其中 O 常数和 r、k 及 Φ 的系数有关. 这公式表明映射 T_{L^r} 作用于 $\Phi\in\mathbb{R}_L$ 时，它的主要部份相当于形式对数微分算子级数 $(-1)^r H^{(r)}(D)$ 作用于 Φ，其结果是一个 $k+r+1$ 次对数多项式.

下面先证明一个关于具有这种性质的映射 T_f 的一般性定理.

定理 2 设给定 $f\in\mathbb{A}$，$g\in\mathbb{A}$，再设存在两个对数微分算子的形式 Laurent 级数

$$F(D)=\sum_{m=-m_1}^{\infty} a_m D^m \quad (a_{-m_1}\neq 0) \tag{24}$$

和

$$G(D)=\sum_{m=-m_2}^{\infty} b_m D^m \quad (b_{-m_2}\neq 0), \tag{25}$$

使对每一整数 $k\geqslant 0$ 及任一 k 次对数多项式 Φ，一定有

$$T_f(\Phi)=F(D)\Phi+O(\lambda_k) \tag{26}$$

和

$$T_g(\Phi)=G(D)\Phi+O(\eta_k), \tag{27}$$

其中 $\lambda_k\in\mathbb{R}$，$\eta_k\in\mathbb{R}$ 是仅和 k 有关的非负函数，O 常数和 k、Φ 的系数有关. 则有(a)

$$(28)\qquad T_{c_1f+c_2g}(\Phi)=c_1F(D)\Phi+c_2G(D)\Phi+O(|c_1|\lambda_k+|c_2|\eta_k),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数; (b)

$$(29)\qquad T_{fL}(\Phi)=-F'(D)\Phi+O(\lambda_kL+\lambda_{k+1});$$

(c)当 f 有逆函数 f^{-1} 时, 对 $k\geqslant m_1$, 有

$$(30)\qquad T_{f^{-1}}(\Phi)=F^{-1}(D)\Phi+O(|T_{f^{-1}}(P_{m_1-1})|)+O(T_{|f^{-1}|}(\lambda_{k-m_1})),$$

其中 P_{m_1-1} 当 $m_1\leqslant 0$ 时恒等于零, 当 $m_1\geqslant 1$ 时, 是 m_1-1 次对数多项式; (d)

$$(31)\qquad T_fT_g(\Phi)=F(D)G(D)\Phi+O(\Delta_k),$$

其中

$$\Delta_k(x)=\sum_{n\leqslant y}\frac{|f(n)|}{n}\eta_k\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{n\leqslant z}\frac{|g(n)|}{n}\lambda_k\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$+\sum_{m=1}^{m_2}\sum_{i=1}^{m}b_{-m}\frac{k!}{(m-i)!(k+i)!}(\ln z))^{m-i}\lambda_{k+i}(y)$$
$$+\sum_{m=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{m}a_{-m}\frac{k!}{(m-i)!(k+i)!}(\ln y)^{m-i}\eta_{k+i}(z)$$
$$+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_i(y)\eta_{k-i}(z),$$

$x=yz$, $y\geqslant 1$, $z\geqslant 1$, 以及当 m_1 或 m_2 小于 1 时, 相应的和式不出现.

证 (28)式是(26)、(27)及§2(8)式的显然推论. 由§2定理2(对 T_f 亦成立)知

$$(32)\qquad \begin{aligned}T_{fL}(\Phi)&=(LT_f-T_fL)(\Phi)\\&=LT_f(\Phi)-T_fL(\Phi)\\&=LT_f(\Phi)-T_f(L\Phi)\\&=LF(D)\Phi-F(D)(L\Phi)+O(\lambda_kL+\lambda_{k+1}),\end{aligned}$$

最后一步用到了(26)式以及 $L\Phi$ 是 $k+1$ 次对数多项式．如果我们能够证明：对任意的 $\Phi\in\mathbb{R}_L$ 必有

$$(33)\qquad LF(D)\Phi-F(D)(L\Phi)=-F'(D)\Phi,$$

则由此及(32)式就证明了(29)式．由于可加性，我们只要对 $F(D)=D^m$, $\Phi=L^k$ 来证明上式．这时，当 $k\geqslant m$ 时，由(13)式得

$$(34)\quad LD^mL^k-D^mL^{k+1}$$

$$=\frac{k!}{(k-m)!}L^{k-m+1}-\frac{(k+1)!}{(k+1-m)!}L^{k-m+1}$$

$$=-m\frac{k!}{(k+1-m)!}L^{k-m+1}=-mD^{m-1}L^k$$

$$=(D^m)'L^k.$$

所以(33)式成立．再由直接验算知，$k=m-1$ 时上式亦成立，当 $k<m-1$ 时，两端均为零亦显然成立．这就证明了(29)式．

下面来证(30)式．这时由(24)式知

$$(35)\qquad F^{-1}(D)=\sum_{n=m_1}^{\infty}a'_nD^n,$$

$$(36)\quad a'_{m_1}=\frac{1}{a_{-m_1}}\neq0,\qquad \sum_{\substack{m+n=l\\ m\geqslant-m_1,\,n\geqslant m_1}}a_ma'_n=0\quad(l\geqslant1).$$

由于 $k\geqslant m_1$，所以 $F^{-1}(D)\Phi$ 是 $k-m_1$ 次对数多项式．由假设知

$$(37)\quad T_f(F^{-1}(D)\Phi)=F(D)(F^{-1}(D)\Phi)+O(\lambda_{k-m_1}).$$

下面证明：

$$(38)\qquad F(D)(F^{-1}(D)\Phi)=\Phi+P_{m_1-1},$$

其中当 $m_1\geqslant1$ 时，P_{m-1} 是 $\leqslant m_1-1$ 次对数多项式，当 $m_1\leqslant$

0 时恒等于零. 显然这只要对 $\Phi=L^k$ 证明. 由(24)、(35)、(13)、(14)式及 $k\geqslant m_1$ 得

$$F(D)(F^{-1}(D)L^k)=\Big(\sum_{m=-m_1}^{\infty}a_mD^m\Big)\Big(\sum_{n=m_1}^{k}a'_nD^nL^k\Big)$$

$$=\sum_{m=-m_1}^{\infty}a_mD^m\Big(\sum_{n=m_1}^{k}a'_n\frac{k!}{(k-n)!}L^{k-n}\Big)$$

$$=\sum_{n=m_1}^{k}a'_n\frac{k!}{(k-n)!}\sum_{m=-m_1}^{k-n}a_m\frac{(k-n)!}{(k-n-m)!}L^{k-n-m}$$

$$=\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{(k-l)!}L^{k-l}\sum_{\substack{m+n=l\\ m_1\leqslant n\leqslant k\\ -m_1\leqslant m\leqslant k-n}}a_ma'_n.$$

由此及(36)式就证明了(38)式对 $\Phi=L^k$ 成立, 因而对一般的 Φ 亦成立. 对(37)式两端作用算子 $T_{f^{-1}}$, 且利用(38)式及§2的(10)和(11)式即得

$$(39)\qquad F^{-1}(D)\Phi=T_{f^{-1}}(T_f(F^{-1}(D)\Phi))$$
$$=T_{f^{-1}}(\Phi)+T_{f^{-1}}(P_{m_1-1})+O(T_{|f^{-1}|}(\lambda_{k-m_1})),$$

这就证明了(30)式*).

最后, 我们证明(31)式. 这里重要的是余项 $\Delta_k(x)$ 的形式, 适当选取 y, z 可以得到较好的余项的阶的估计. 证明所用的方法就是第四章§1引理2的附注中指出的双曲型求和法. 同样的, 在此也只要讨论 $\Phi=L^k$ 的情形. 由 $x=yz$ 得到

$$(40)\qquad T_fT_g(L^k)=\sum_{rs\leqslant x}\frac{f(r)}{r}\frac{g(s)}{s}\Big(\ln\frac{x}{rs}\Big)^k$$
$$=\sum_{r\leqslant y}\frac{f(r)}{r}\sum_{s\leqslant\frac{x}{r}}\frac{g(s)}{s}\Big(\ln\frac{x}{rs}\Big)^k$$

*) 当 $k\leqslant m_1-1$ 时, 显然有 $F^{-1}(D)\Phi=0$, 取 $P_{m_1-1}=\Phi$ (30)式也成立。

$$+\sum_{s<z}\frac{g(s)}{s}\sum_{r<\frac{x}{s}}\frac{f(r)}{r}\left(\ln\frac{x}{rs}\right)^k$$

$$-\sum_{r\leqslant y}\sum_{s\leqslant z}\frac{f(r)}{r}\frac{g(s)}{s}\left(\ln\frac{x}{rs}\right)^k$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2-\Sigma_3.$$

这里和式的分拆类似于第四章§1(12)式所作的分拆.

设

$$(41)\qquad \Sigma_{12}=\sum_{r<y}\frac{f(r)}{r}O\left(\eta_k\left(\frac{x}{r}\right)\right),$$

利用(25)、(13)、(14)及(24)式可得

$$(42)\qquad \Sigma_1=\sum_{r<y}\frac{f(r)}{r}(G(D)L^k)\left(\frac{x}{r}\right)+\Sigma_{12}$$

$$=\sum_{r<y}\frac{f(r)}{r}\sum_{m=-m_2}^{k}\frac{b_m k!}{(k-m)!}\left(\ln\frac{x}{r}\right)^{k-m}+\Sigma_{12}$$

$$=\sum_{m=-m_2}^{k}\sum_{i=0}^{k-m}\frac{b_m k!}{i!(k-m-i)!}(\ln z)^{k-m-i}$$

$$\times\sum_{r<y}\frac{f(r)}{r}\left(\ln\frac{y}{r}\right)^i+\Sigma_{12}$$

$$=\sum_{m=-m_2}^{k}\sum_{i=0}^{k-m}\frac{b_m k!}{i!(k-m-i)!}(\ln z)^{k-m-i}$$

$$\times(F(D)L^i)(y)+\Sigma_{12}+\Sigma_{13}.$$

其中

$$(43)\quad \Sigma_{13}=\sum_{m=-m_2}^{k}\sum_{i=0}^{k-m}\frac{b_m k!}{i!(k-m-i)!}(\ln z)^{k-m-i}O(\lambda_i(y)),$$

要指出的是这里的余项 $O(\lambda_i(y))$是由算子 T_f 作用于 L^i 上产生的. 进而由(13)、(14)式得到

(44) $$\Sigma_1=\sum_{m=-m_2}^{k}\sum_{i=0}^{k-m}\frac{b_m k!}{i!(k-m-i)!}(\ln z)^{k-m-i}$$
$$\times\sum_{n=-m_1}^{i}\frac{a_n i!}{(i-n)!}(\ln y)^{i-n}+\Sigma_{12}+\Sigma_{13}$$
$$=\sum_{m=-m_2}^{k}\sum_{n=-m_1}^{k-m}\sum_{i=n_+}^{k-m}\frac{a_n b_m k!}{(i-n)!(k-m-i)!}$$
$$\times(\ln z)^{k-m-i}(\ln y)^{i-n}+\Sigma_{12}+\Sigma_{13}$$
$$=\sum_{m=-m_2}^{k}\sum_{n=-m_1}^{k-m}\frac{a_n b_m k!}{(k-m-n)!}(\ln x)^{k-m-n}$$
$$+\Sigma_{12}+\Sigma_{13}-\Sigma_{14},$$

其中对任一实数 a, 定义

(45) $$a_+=\max(0,\ a),$$

(46) $$\Sigma_{14}=\sum_{m=-m_2}^{k}\sum_{n=-m_1}^{-1}\sum_{i=n}^{-1}\frac{a_n b_m k!}{(i-n)!(k-m-i)!}$$
$$\times(\ln z)^{k-m-i}(\ln y)^{i-n}.$$

由于从(24)、(25)、(13)及(14)式直接可得

(47) $$\sum_{m=-m_2}^{k}\sum_{n=-m_1}^{k-m}\frac{a_n b_m k!}{(k-m-n)!}(\ln x)^{k-m-n}$$
$$=\sum_{\substack{m=-m_2\\ m+n\leq k}}^{k}\sum_{n=-m_1}^{k}\frac{a_n b_m k!}{(k-m-n)!}(\ln x)^{k-m-n}$$
$$=(F(D)G(D)L^k)(x),$$

所以

(48) $$\Sigma_1=(F(D)G(D)L^k)(x)+\Sigma_{12}+\Sigma_{13}-\Sigma_{14}.$$

类似可得

(49) $$\Sigma_2=(F(D)G(D)L^k)(x)+\Sigma_{22}+\Sigma_{23}-\Sigma_{24},$$

其中

(50) $$\Sigma_{22}=\sum_{s\leqslant z}\frac{g(s)}{s}O\left(\lambda_k\left(\frac{x}{s}\right)\right),$$

(51) $$\Sigma_{23}=\sum_{n=-m_1}^{k}\sum_{i=0}^{k-n}\frac{a_n k!}{i!(k-n-i)!}(\ln y)^{k-n-i}O(\eta_i(z)),$$

这里的余项 $O(\eta_i(z))$ 是由算子 T_g 作用于 L^i 上产生的，以及

(52)

$$\Sigma_{24}=\sum_{n=-m_1}^{k}\sum_{m=-m_2}^{-1}\sum_{i=m}^{-1}\frac{a_n b_m k!}{(i-n)!(k-n-i)!}\times(\ln y)^{k-n-i}(\ln z)^{i-m}.$$

下面计算 Σ_3. 由(24)、(25)式可得

(53) $$\begin{aligned}\Sigma_3&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{r\leqslant y}\frac{f(r)}{r}\left(\ln\frac{y}{r}\right)^i\times\sum_{s\leqslant z}\frac{g(s)}{s}\left(\ln\frac{z}{s}\right)^{k-i}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(F(D)L^i)(y)(G(D)L^{k-i})(z)\\&\quad+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(F(D)L^i)(y)O(\eta_{k-i}(z))\\&\quad+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(G(D)L^{k-i})(z)O(\lambda_i(y))\\&\quad+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}O(\lambda_i(y))O(\eta_{k-i}(z))\\&=\Sigma_{31}+\Sigma_{32}+\Sigma_{33}+\Sigma_{34},\end{aligned}$$

这里的余项 $O(\lambda_i(y))$ 和 $O(\eta_i(z))$ 分别是 T_f 和 T_g 作用于 L^i 上产生的，和前面的相同. 下面计算 Σ_{31}, Σ_{32}, Σ_{33}.

由(13), (14), (47), (46), (52)式可得

(54) $$\Sigma_{31}=\sum_{i=0}^{k}\sum_{n=-m_1}^{i}\sum_{m=-m_2}^{k-i}\frac{a_n b_m k!}{(i-n)!(k-m-i)!}$$
$$\times(\ln y)^{i-n}(\ln z)^{k-m-i}$$
$$=\sum_{\substack{n=-m_1\\ n+m\leq k}}^{k}\sum_{m=-m_2}^{k}\sum_{i=n_+}^{k-m_+}\frac{a_n b_m k!}{(i-n)!(k-m-i)!}$$
$$\times(\ln y)^{i-n}(\ln z)^{k-m-i}$$
$$=(F(D)G(D)L^k)(x)-\Sigma_{14}-\Sigma_{24}.$$

由(13)，(14)及(51)式(注意到余项的相同)可得

(55)
$$\Sigma_{32}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{k-i}(F(D)L^{k-i})(y)O(\eta_i(z))$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\sum_{n=-m_1}^{k-i}\frac{a_n(k-i)!}{i!(k-i-n)!}(\ln y)^{k-i-n}O(\eta_i(z))$$
$$=\sum_{n=-m_1}^{k}\sum_{i=0}^{k-n_+}\frac{a_n k!}{i!(k-i-n)!}(\ln y)^{k-i-n}O(\eta_i(z))$$
$$=\Sigma_{23}-\sum_{n=-m_1}^{-1}\sum_{i=k+1}^{k-n}\frac{a_n k!}{i!(k-i-n)!}(\ln y)^{k-i-n}O(\eta_i(z))$$
$$=\Sigma_{23}-\sum_{n=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{-n}k!}{(k+i)!(n-i)!}(\ln y)^{n-i}O(\eta_{k+i}(z)).$$

类似地由(13)，(14)及(43)式(注意余项相同)可得

(56)
$$\Sigma_{33}=\Sigma_{13}-\sum_{m=1}^{m_2}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_{-m}k!}{(k+i)!(m-i)!}(\ln z)^{m-i}O(\lambda_{k+i}(y)).$$

综合(40)，(41)，(48)，(49)，(50)，(53)，(54)，(55)及(56)式即得(31)式. ∎

由定理1及定理2就可证明下面的结果:

定理3 设 $\Phi\in\mathbb{R}_L$，次数为 k，再设 $H(D)$ 是(16)式给出

的算子. 则 a)对于 $r\geqslant 0$, $\alpha_r\geqslant 1$, 有

(57)

$$T_{L^r}^{\alpha_r}(\Phi)=(-1)^{r\alpha_r}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r}\Phi+O(x^{\frac{-1}{\alpha_r}}L^{k+r\alpha_r+(\alpha_r-1)});$$

(b) 对于 $\alpha_r\geqslant 0$ $(r=0,\ 1,\ \cdots,\ R)$, $n_1=\sum\limits_{r=0}^{R}\alpha_r\geqslant 1$, 有

$$\left(\prod_{r=0}^{R}T_{L^r}^{\alpha_r}\right)(\Phi)=(-1)^{n_2}\left(\prod_{r=0}^{R}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r}\right)\Phi+O(x^{-\frac{1}{n_1}}L^{k+n_1+n_2-n_3}),\tag{58}$$

其中 $n_2=\sum\limits_{r=1}^{R}r\alpha_r$, n_3 为 $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\alpha_R$ 中不等于零的个数;

(c) 对于 $\alpha\geqslant 1$, 有

$$T_{\mu}^{\alpha}(\Phi)=H^{-\alpha}(D)\Phi+O(L^{\alpha-1});\tag{59}$$

(d) 对于 $\alpha\geqslant 1$, 有

$$\left(T_{\mu}^{\alpha}\prod_{r=1}^{R}T_{L^r}^{\alpha_r}\right)(\Phi)=(-1)^{n_2}\left(H^{-\alpha}(D)\prod_{r=1}^{R}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r}\right)\Phi+O(L^{\alpha-1}),\tag{60}$$

且

$$H^{-\alpha}(D)\prod_{r=1}^{R}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r}=a\left(\frac{1}{D}\right)^{n_4}+\cdots,\tag{61}$$

其中 a 为一常数,

$$n_4=\sum_{r=1}^{R}(r+1)\alpha_r-\alpha.\tag{62}$$

证 (57)式的证明: 对 α_r 用归纳法: 当 $\alpha_r=1$ 时, (57)式即是(23)式, 所以成立. 设 $\alpha_r\geqslant 2$, (57)式对 $<\alpha_r$ 都成立. 因而有

(63) $$T_{L^r}^{\alpha_r-1}(\Phi)=(-1)^{r(\alpha_r-1)}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r-1}\Phi + O\left(x^{\frac{-1}{\alpha_r-1}}L^{k+r(\alpha_r-1)+(\alpha_r-2)}\right).$$

在定理2中取 $T_f=T_{L^r}^{\alpha_r-1}$, $T_g=T_{L^r}$, 再取 $y=x^{1-\frac{1}{\alpha_r}}$, $z=x^{\frac{1}{\alpha_r}}$, 由(31), (23)及(63)式得

(64)

$$T_{L^r}^{\alpha_r}(\Phi)=T_fT_g(\Phi)=(-1)^{r\alpha_r}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r}\Phi+O(\Delta_k),$$

其中(注意到这里的 $m_1=(r+1)(\alpha_r-1)$, $m_2=r+1$)

$$\begin{aligned}
\Delta_k(x) \ll & \sum_{n<y}\frac{f(n)}{n}\frac{n}{x}\left(\ln\frac{x}{n}\right)^{k+r} \\
& + \sum_{n<z}\frac{g(n)}{n}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha_r-1}}\left(\ln\frac{x}{n}\right)^{k+r(\alpha_r-1)+(\alpha_r-2)} \\
& + y^{\frac{-1}{\alpha_r-1}}(\ln x)^{r+1+k+r(\alpha_r-1)+(\alpha_r-2)} \\
& + z^{-1}(\ln x)^{(r+1)(\alpha_r-1)+k+r} \\
& + y^{\frac{-1}{\alpha_r-1}}z^{-1}(\ln x)^{r(\alpha_r-1)+(\alpha_r-2)+k+r} \\
\ll & z^{-1}(\ln x)^{k+r}\sum_{n<y}\frac{f(n)}{n} \\
& + y^{\frac{-1}{\alpha_r-1}}(\ln x)^{k+r(\alpha_r-1)+(\alpha_r-2)}\sum_{n<z}\frac{g(n)}{n} \\
& + y^{\frac{-1}{\alpha_r-1}}(\ln x)^{k+r\alpha_r+(\alpha_r-1)} \\
& + z^{-1}(\ln x)^{k+r\alpha_r+(\alpha_r-1)} \\
& + z^{-1}y^{\frac{-1}{\alpha_r-1}}(\ln x)^{k+r\alpha_r+(\alpha_r-2)}.
\end{aligned}$$

在(23)和(63)式中取 $\Phi=I$, 得

$$\sum_{n\leqslant z}\frac{g(n)}{n}=(T_{L^r}(I))(z)\ll(\ln x)^{r+1};$$

$$\sum_{n<y}\frac{f(n)}{n}=(T_{L^r}^{\alpha_r-1}(I))(y)\ll(\ln x)^{(\alpha_r-1)(r+1)}.$$

综合以上三式,并注意到$z=x^{\frac{1}{\alpha_r}}$, $y=x^{1-\frac{1}{\alpha_r}}$,即得

$$\Delta_k(x)\ll x^{-\frac{1}{\alpha_r}}(\ln x)^{k+r\alpha_r+(\alpha_r-1)},$$

这就证明了(57)式.

(58)式的证明:与(57)式相同. 这里要对 R 用归纳法,并利用已经证明的(57)式. 在用定理2时取

$$T_f=\prod_{r=0}^{R-1}T_{L^r}^{\alpha_r},\ T_g=T_{L^R}^{\alpha_R}.$$

详细推导留给读者.

(59)式的证明:对 α 用归纳法:先证(59)式对于 $\alpha=1$ 成立. 在定理2(c)中取 $f=I$,这时 $m_1=1$,并利用(23)式($r=0$)得

$$T_\mu(\Phi)=H^{-1}(D)\Phi+O(|T_\mu(cI)|)$$
$$+O\Big(T_{|\mu|}\Big(\frac{L^{k-1}}{x}\Big)\Big).$$

由(6)式知 $$T_\mu(cI)\ll1,$$

而 $$T_{|\mu|}\Big(\frac{L^{k-1}}{x}\Big)\leqslant\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\Big(\frac{n}{x}\Big)\Big(\ln\frac{x}{n}\Big)^{k-1}\ll1.$$

由以上三式就证明了(59)式对 $\alpha=1$ 成立. 现设 $\alpha\geqslant2$, (59)式对 $<\alpha$ 都成立,则有

$$T_\mu^\alpha(\Phi)=T_\mu(T_\mu^{\alpha-1}(\Phi))=T_\mu(H^{-\alpha+1}(D)\Phi)+T_\mu(O(L^{\alpha-2}))$$
$$=H^{-\alpha}(D)\Phi+O(1)+O(L^{\alpha-1}),$$

即(59)式对 α 也成立.

(60)式的证明:对 α 用归纳法:当 $\alpha=1$ 时,由(58)式($\alpha_0=0$)及(59)式($\alpha=1$)可得*)

---

*) 这里可假定 $n_1=\sum_{r=1}^{R}\alpha_r\geqslant1$,因当 $n_1=0$ 时,(60)式即(59)式.

$$\left(T_\mu \prod_{r=1}^{R} T_{L^r}^{\alpha_r}\right)(\Phi)=T_\mu\left(\left(\prod_{r=1}^{R} T_{L^r}^{\alpha_r}\right)(\Phi)\right)$$

$$=T_\mu\left((-1)^{n_2}\prod_{r=1}^{R}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r}\Phi\right)$$

$$+T_\mu(O(x^{-\frac{1}{n_1}}L^{k+n_1+n_2-n_3}))$$

$$=(-1)^{n_2}\left(H^{-1}(D)\prod_{r=1}^{R}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r}\right)\Phi+O(1),$$

所以(60)式对 $\alpha=1$ 成立，这里用到了估计*)：对任意的 $d\geqslant 0, c>0$, 有

$$T_\mu(O(x^{-c}L^d))\ll\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{x}\right)^c\left(\ln\frac{x}{n}\right)^d$$

$$=x^{-c}\sum_{n\leqslant x}n^{-1+c}\left(\ln\frac{x}{n}\right)^d\ll 1.$$

现设 $\alpha\geqslant 2$, (60)式对 $<\alpha$ 均成立，则有

$$\left(T_\mu^\alpha\prod_{r=1}^{R}T_{L^r}^{\alpha_r}\right)(\Phi)=T_\mu\left(\left(T_\mu^{\alpha-1}\prod_{r=1}^{R}T_{L^r}^{\alpha_r}\right)(\Phi)\right)$$

$$=T_\mu\left((-1)^{n_2}H^{-\alpha+1}(D)\prod_{r=1}^{R}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r}\Phi\right)$$

$$+T_\mu(O(L^{\alpha-2}))$$

$$=(-1)^{n_2}H^{-\alpha}(D)\prod_{r=1}^{R}(H^{(r)}(D))^{\alpha_r}\Phi$$

$$+O(1)+O(L^{\alpha-1}).$$

这就证明了(60)式对 α 亦成立. 由(17)、(18)式不难证明(61)式. ∎

下面来举几个具体例子：

例 1 设 $\Phi\in\mathbb{R}_L$, 次数为 k, 求 $T_{\Lambda-I}(\Phi)$.

由于 $\Lambda=\mu*L$, 故由(60)式得

---

*) 证明留给读者.

(65)

$$T_\Lambda(\Phi)=T_\mu T_L(\Phi)=-H^{-1}(D)H'(D)\Phi+O(1).$$

而由(23)式($r=0$),得

(66) $$T_I(\Phi)=H(D)\Phi+O(x^{-1}L^k).$$

由(17),(18),(19)及(20)式可得

(67) $$-H^{-1}(D)H'(D)=D^{-1}-\gamma+\cdots.$$

进而有

(68)

$$T_{\Lambda-I}(\Phi)=(-2\gamma+\cdots)\Phi+O(1)=B(D)\Phi+O(1).$$

若令 $\Phi=I$,则(68)式变为

(69) $$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)-1}{n}=O(1).$$

这就是第三章§2中的定理1.

例2 设整数 $r\geqslant1$, $\Phi\in\mathbb{R}_L$,次数为 k, 求 $T_{(\Lambda-I)L^r}(\Phi)$.

由例1及定理2的(29)式(连用 r 次)即得

(70) $$T_{(\Lambda-I)L^r}(\Phi)=(-1)^rB^{(r)}(D)\Phi+O(L^r).$$

例3 求 $T_{\Lambda_r}(\Phi)$, $\Phi\in\mathbb{R}_L$.

由于 $\Lambda_r=\mu*L^r$, 由定理3中的(60)式得

(71)

$$T_{\Lambda_r}(\Phi)=T_\mu T_{L^r}(\Phi)=(-1)^rH^{-1}(D)H^{(r)}(D)\Phi+O(1).$$

而由式(17)～(20)式可得

(72)

$$(-1)^rH^{-1}(D)H^{(r)}(D)=r!D^{-r}-\gamma r!D^{-r+1}+\cdots.$$

§5 S_f 的计算与映射类 $\mathscr{B}^*_{k,n}$

利用上节关于 T_f 的结果,可以计算 S_f. 首先证明一个

引理.

引理 1 设整数 $l\geqslant 0$, $k\geqslant 0$, 则

$$(1)\qquad \int_1^x (\ln u)^l\left(\ln\frac{x}{u}\right)^k du = xP_l(L)+P_{l+k}(L).$$

其中 $P_m(L)$ 表示 m 次对数多项式.

证 设 $x=e^y$, 作变量替换 $u=e^t$, 得

$$\int_1^x (\ln u)^l\left(\ln\frac{x}{u}\right)^k du = \int_0^y t^l(y-t)^k e^t\,dt$$

$$= e^y\int_0^y (y-s)^l s^k e^{-s}\,ds$$

$$= e^y\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\binom{l}{i}y^{l-i}\int_0^y s^{k+i}e^{-s}\,ds,$$

$$= x\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\binom{l}{i}(\ln x)^{l-i}\int_0^{\ln x} s^{k+i}e^{-s}\,ds,$$

而
$$\int_0^{\ln x} s^{k+i}e^{-s}\,ds = (k+i)!+x^{-1}Q_{k+i}(L),$$

$Q_{k+i}(L)$ 为 $k+i$ 次对数多项式. 由以上两式即得(1)式. ▌

下面证明关于 $S_f(\Phi)$ $(\Phi\in\mathbb{R}_L)$ 的一个一般性结果.

定理 1 设 $f\in\mathbb{A}$, $F(D)=\sum_{m=-m_1}^{\infty}a_mD^m\,(a_{-m_1}\neq 0)$. 再设存在一个正的递增函数 λ_0, 使得

$$(2)\qquad T_f(I)=F(D)I+O(\lambda_0).$$

则对任意的 $\Phi\in\mathbb{R}_L$, 有

(3)

$$S_f(\Phi)=\int_1^x (DF(D)I)(t)\Phi\left(\frac{x}{t}\right)dt+O(x\lambda_0(x)).$$

证 显然只要讨论 $\Phi=L^k$ 的情形. 由第三章 §1 引理 2 可得

$$S_f(L^k)=\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n}n\left(\ln\frac{x}{n}\right)^k=f(1)\ln^k x$$
$$+\int_1^x t\left(\ln\frac{x}{t}\right)^k\frac{d}{dt}\{(F(D)I)(t)\}dt-\ln^k x\,O(\lambda_0(1))$$
$$-\int_1^x\frac{d}{dt}\left(t\left(\ln\frac{x}{t}\right)^k\right)O(\lambda_0(t))dt.$$
同时由于
$$\frac{d}{dt}=\frac{dL}{dt}\frac{d}{dL}=\frac{1}{t}D,$$
所以
$$\int_1^x t\left(\ln\frac{x}{t}\right)^k\frac{d}{dt}\{(F(D)I)(t)\}dt$$
$$=\int_1^x(DF(D)I)(t)\left(\ln\frac{x}{t}\right)^k dt.$$
此外，由于 λ_0 是正的递增的，所以
$$\int_1^x\frac{d}{dt}\left(t\left(\ln\frac{x}{t}\right)^k\right)O(\lambda_0(t))dt$$
$$\ll\lambda_0(x)\int_1^x\left\{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^k+k\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{k-1}\right\}dt$$
$$\ll x\lambda_0(x).$$
最后一步用到了引理 1($l=0$). 综合以上各式就证明了所要的结果. ▌

容易看出，在给出的 $F(D)$ 的表示式中，若 $m_1\leqslant 0$，则 $DF(D)I\equiv 0$；若 $m_1\geqslant 1$，则 $DF(D)I$ 是一个 m_1-1 次的对数多项式. 因而，由引理 1 即得

推论 1 在定理 1 的条件下，若 $m_1\leqslant 0$，则

$$S_f(\Phi)=O(x\lambda_0);\tag{4}$$

若 $m_1\geqslant 1$，则

$$S_f(\Phi)=xP_{m_1-1}+O(x\lambda_0),\tag{5}$$

其中 $P_{m_1-1}(L)$ 是 m_1-1 次对数多项式.

值得指出的是:在上述推论 1 中不管是何种情形,在所得的结果中的主项和余项的阶都和 k 无关.

$DF(D)I$ 称为算术函数 f 的剩余(对数)多项式.

定义 1 由所有这样的映射 S_f 组成的集合称为 $\mathscr{B}^*_{h,n}$ 类,若 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$ 及 f 的剩余对数多项式为零.

由映射类 $\mathscr{B}_{h,n}$ 的定义(§ 3 定义 1),关于计算 $T_f(\Phi)$ 的定理(§ 4 定理 3),类 $\mathscr{B}^*_{h,n}$ 的定义以及上述推论 1,我们得到:

定理 2 设 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$,则对任一 $\Phi\in\mathbb{R}_L$ 有

$$S_f(\Phi)=xP(L)+O(xL^{h-1}), \tag{6}$$

其中 $P(L)$ 为次数 $\leqslant n-1$ 的对数多项式;而当 $S_f\in\mathscr{B}^*_{h,n}$ 时,则有

$$S_f(\Phi)=O(xL^{h-1}). \tag{7}$$

证 显然,可假定 S_f 是由 § 3(1)式给出的正规映射,其级 $\alpha=\delta(f)\leqslant h$,权 $\rho(f)\leqslant n$. 由 § 4(62)式知,这时在相应的 § 4(24)式中的

$$m_1=n_4=\rho(f)\leqslant n.$$

由此及推论 1 就证明了(6)和(7)式中的主项分别为 $xP(L)$ 和零. 当 $\alpha\geqslant 1$ 时,由 § 4(60)式知可取 $\lambda_0=L^{\alpha-1}\leqslant L^{h-1}$, $x\geqslant 3$. 所以(6)和(7)式中的余项亦成立. 而当 $\alpha\leqslant 0$ 时,

$$S^\alpha_\mu=S^{-\alpha}_I,$$

由 § 4(58)式知,这样取余项显然是可以的. ▌

由映射类 $\mathscr{B}_{h,n}$ 的性质及 $\mathscr{B}^*_{h,n}$ 的定义,容易证明映射类 $\mathscr{B}^*_{h,n}$ 有以下性质:

定理 3 (a) $\mathscr{B}^*_{h,n}$ 类中的映射的线性组合仍是 $\mathscr{B}^*_{h,n}$ 类中的映射;(b)若 $S_f\in\mathscr{B}^*_{h,n}$,则

$$S_{fL}\in\mathscr{B}^*_{h+1,n+1};$$

(c) 若 $S_{f_1}\in\mathscr{B}^*_{h_1,n_1}$, $S_{f_2}\in\mathscr{B}^*_{h_2,n_2}$,

则 $$S_{f_1}S_{f_2}\in\mathscr{B}^*_{h_1+h_2,\,n_1+n_2};$$

(d) 若 $S_f\in\mathscr{B}^*_{h,n}$, 则

$$S_{fL^{m+1}}+h\binom{h+m}{h}S_{(\Lambda-I)L^m}S_f\in\mathscr{B}^*_{h+m,\,n+m+1}. \tag{8}$$

上述这些性质的证明留给读者. 在证明(8)式时要用到

$$S_{\Lambda-I}\in\mathscr{B}^*_{1,1} \tag{9}$$

这由§4(68)式可立即推出来. 由§4(70)式可知

$$S_{(\Lambda-I)L^r}\in\mathscr{B}^*_{r+1,r+1}. \tag{10}$$

最后我们举一个具体例子, 求 $S_{\Lambda_r}(I)$.

由(72)式知: Λ_r 的剩余对数多项式为

$$\begin{aligned}(r!D^{-r+1}-\gamma r!D^{-r+2}+\cdots)I\\=rL^{r-1}-\gamma r(r-1)L^{r-2}+\cdots,\end{aligned} \tag{11}$$

而由(71)式知: 可取 $\lambda_0=1$, 所以

(12)

$$\begin{aligned}S_{\Lambda r}(I)&=\int_1^x\{r(\ln t)^{r-1}-\gamma r(r-1)(\ln t)^{r-2}+\cdots\}\,dt+O(x)\\&=rx(\ln x)^{r-1}-r(r-1)(1+\gamma)x(\ln x)^{r-2}+\cdots+O(x).\end{aligned}$$

当 $r=2$ 时, 这就是 Selberg 不等式 (第五章§2(3)式) 的等价形式——第五章§2(5)式. 但当 $r>2$ 时, (12)式不能看作是 Selberg 不等式的正确推广.

§6 一般的 Selberg 不等式

由于

$$\psi(x)-x=S_{\Lambda-I}(I)+O(1), \tag{1}$$

所以利用 Чебышев 不等式可把 Selberg 不等式 (第五章§2(3)式)写为如下的形式

(2) $$LS_{\Lambda-I}(I)+S_\Lambda S_{\Lambda-I}(I)=O(x).$$

再由 § 2(16)式知

$$LS_{\Lambda-I}(I)=S_{(\Lambda-I)L}(I)+S_{\Lambda-I}L(I),$$

而根据 § 5(9)式知 $S_{\Lambda-I}\in\mathscr{B}^*_{1,1}$, 利用 § 5(7)式得

$$S_{\Lambda-I}L(I)=S_{\Lambda-I}(L)=O(x),$$

所以(2)式可进一步改写为

(3) $$S_{(\Lambda-I)L}(I)+S_\Lambda S_{\Lambda-I}(I)=O(x).$$

我们知道(见第五章 § 1) 推广 Selberg 不等式实质上就是要研究 $S_{(\Lambda-I)}L^{m+1}(I)$ (由 § 2(17)式知研究它是和研究 $L^{m+1}S_{\Lambda-I}(I)$一样的), 求出其主项, 证明类似于(3)式的不等式. Bombieri 证明了下面的定理 1, 从而得到了一般形式的 Selberg 不等式. 这里要指出的是: (3)式左端的映射

$$S_{(\Lambda-I)L}+S_\Lambda S_{\Lambda-I}$$

恰好就是 § 3(17)式左端取 $m=0$, $f=\Lambda-I$ 的情形, 而 § 3 (17)和 § 3(25)式是等价的, 且讨论 § 3(25) 式的左端比较简单, 这就是 Bombieri 的方法.

定理 1. 设 $S_{f_1}\in\mathscr{B}^*_{h_1,n_1}$, m 为任给的非负整数. 则一定存在 $S_{f_2}\in\mathscr{B}^*_{h_1+m,n_1+m+1}$, 使得

(4)
$$S_{f_1L^{m+1}}(I)-\binom{h_1+m}{m+1}S_{\mu L^{m+1}}S_IS_{f_1}(I)-S_{f_2}(I)=O(x),$$

进而有

(5) $$|S_{f_1L^{m+1}}(I)-S_{f_2}(I)|$$
$$\leqslant(m+1)\binom{h_1+m}{m+1}S_{L^m}(|S_{f_1}(I)|)+O(xL^n).$$

证 根据剩余对数多项式的定义及 § 4 定理 2, 容易看

出: f_1L^{m+1} 的剩余对数多项式为零; I 及 μL^{m+1} 的剩余对数多项式分别为 1 及零, 因而, $(\mu L^{m+1})*I*f_1$ 的剩余多项式为一常数, 设为 a. 现取

$$S_{f_2}=S_{f_1L^{m+1}}-\binom{h_1+1}{m+1}S_{\mu L^{m+1}}S_I S_{f_1}+a\binom{h_1+m}{m+1}S_I, \tag{6}$$

则显然有 f_2 的剩余多项式为零. 而由 §3(25) 式及 S_I 的级为 -1, 权为 1 可知 $S_{f_2}\in\mathscr{B}_{h_1+m,n_1+m+1}$, 所以

$$S_{f_2}\in\mathscr{B}^*_{h_1+m,n_1+m+1}. \tag{7}$$

再注意到

$$a\binom{h_1+m}{m+1}S_I(I)=O(x), \tag{8}$$

由以上三式即得(4)式. 当取 $m=0$, $f_1=\Lambda-I$ 时, $h_1=1$, 故由 §5(7)式知

$$S_{f_2}(I)=O(x). \tag{9}$$

所以这时从(4)式就推出 Selberg 不等(3)式. (为什么?)

下面证明(5)式. 在 §2 定理 3 中取 $f=I, g=\mu$, 这时 $h=\Lambda$. 由于多项式 $P_m(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 的系数都是正的, 及 $\Lambda(n)\geqslant 0$, $L(n)\geqslant 0$, 所以对任意的 $F\in\mathbb{R}$, 有

(10)

$$\begin{aligned}|S_{\mu L^{m+1}}S_I(F)| &= |P_{m+1}(-S_h, -S_{hL}, \cdots, -S_{hL^m})(F)|\\ &\leqslant P_{m+1}(S_h, S_{hL}, \cdots, S_{hL^m})(|F|)\\ &= S_{\Lambda_{m+1}}(|F|),\end{aligned}$$

由此及(4)式得

$$\begin{aligned}&|S_{f_1L^{m+1}}(I)-S_{f_2}(I)|\\ &\quad\leqslant\binom{h_1+m}{m+1}S_{\Lambda_{m+1}}(|S_{f_1}(I)|)+O(x).\end{aligned} \tag{11}$$

由 § 5(11)式知 Λ_{m+1} 的剩余多项式

(12)
$$P(L,\ \Lambda_{m+1})=(m+1)L^m-\gamma m(m+1)L^{m-1}+\cdots.$$

所以，存在正数 $x_0=x_0(m)$，使当 $x\geqslant x_0$ 时，

(13)
$$P(L,\ \Lambda_{m+1})\leqslant(m+1)L^m,$$

再设

(14)
$$F(x)=|S_{f_1}(I)|=\Big|\sum_{n\leqslant x}f_1(n)\Big|,$$

由 $f_1\in\mathscr{B}^*_{h_1,m_1}$ 及 $n_1\geqslant h_1$，故由 § 5(7)式知

(15)
$$0\leqslant F(x)\ll xL^{h_1-1}\ll xL^{n_1-1}.$$

从而有

(16)
$$\begin{aligned}
S_{\Lambda_{m+1}}(|S_{f_1}(I)|)&=\sum_{n\leqslant x}\Lambda_{m+1}(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\\
&=\sum_{n\leqslant x}\{(S_{\Lambda_{m+1}}(I))(n)-(S_{\Lambda_{m+1}}(I))(n-1)\}\cdot F\left(\frac{x}{n}\right)\\
&=\sum_{n\leqslant x}(S_{\Lambda_{m+1}}(I))(n)\left\{F\left(\frac{x}{n}\right)-F\left(\frac{x}{n+1}\right)\right\}\\
&=\sum_{n\leqslant x}\left\{\int_1^n P(L,\ \Lambda_{m+1})(t)\,dt\right\}\left\{F\left(\frac{x}{n}\right)-F\left(\frac{x}{n+1}\right)\right\}\\
&\quad+O\left(\sum_{n\leqslant x}n\left|F\left(\frac{x}{n}\right)-F\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right)\\
&=\sum_{2\leqslant n\leqslant x}\left(\int_{n-1}^n P(L,\ \Lambda_{m+1})(t)dt\right)F\left(\frac{x}{n}\right)\\
&\quad+O\left(\sum_{n\leqslant x}n\left|F\left(\frac{x}{n}\right)-F\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right)\\
&\leqslant(m+1)\sum_{n\leqslant x}\ln^m nF\left(\frac{x}{n}\right)+O\left(\sum_{n\leqslant x_0}F\left(\frac{x}{n}\right)\right)\\
&\quad+O\left(\sum_{n\leqslant x}n\left|F\left(\frac{x}{n}\right)-F\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right),
\end{aligned}$$

最后一步用到了(13)式及 $F(x)\geqslant 0$. 下面估计上式中的两个误差项. 由(15)式立即得到

$$\sum_{n<x_0} F\left(\frac{x}{n}\right)\ll xL^{n_1-1}. \tag{17}$$

而由(14)式得

(18)

$$\sum_{n<x} n\left|F\left(\frac{x}{n}\right)-F\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\leqslant\sum_{n\leqslant x} n \sum_{\frac{x}{n+1}<l<\frac{x}{n}} |f_1(l)|$$

$$=\sum_{n\leqslant x} n\left\{(S_{|f_1|}(I))\left(\frac{x}{n}\right)-(S_{|f_1|}(I))\left(\frac{x}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n\leqslant x}(S_{|f_1|}(I)\ )\left(\frac{x}{n}\right)=S_I S_{|f_1|}(I).$$

由§3定理4(b)及§5定理2知

$$S_{|f_1|}(I)\ll xL^{n_1-1}, \tag{19}$$

由此及(18)式得

(20)

$$\sum_{n\leqslant x} n\left|F\left(\frac{x}{n}\right)-F\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|$$

$$\ll\sum_{n\leqslant x}\frac{x}{n}\left(\ln\frac{x}{n}\right)^{n_1-1}\ll x\,(\ln x)^{n_1}.$$

由(16)、(17)、(20)及(14)即得

(21)

$$S_{A_{m+1}}(|S_{f_1}(I)|)\leqslant(m+1)S_{L^m}(|S_{f_1}(I)|)+O(xL^{n_1}).$$

由此及(11)式就证明了(5)式. ∎

虽然我们经过很长的讨论后才得到定理1所证明的一般的 Selberg 不等式, 但思想是清楚的, 即要研究 $S_{f_1L^{m+1}}(I)$ 的性质, 用到的工具亦是初等的. 这是原始 Selberg 不等式的很自然的推广. 此外, 和前面两个初等证明一样, 我们还要讨论当 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$ 时, 算术函数 f 的缓慢振动性质, 这种讨论亦

是不难的(见本章第 18 题). 然而,要从这二者来推出:对任意 $A>0$ 有

$$\psi(x)=x+O(x(\ln x)^{-A}),$$

这要比第一个证明复杂和困难得多,要用到很深的实分析知识,在下一节仅概述这一证明的途径.

§7 证明概述

Bombieri 的证明依赖于下面的定理:

定理 1 设 $f\in\mathbb{A}$,

$$\beta(f)=-\overline{\lim_{x\to\infty}}(\ln\ln x)^{-1}\ln\left|\frac{1}{x}S_f(I)\right|. \tag{1}$$

如果存在正数 B 使

$$\beta(\Lambda-I)\leqslant B, \tag{2}$$

则一定存在一串算术函数 $f_2, f_3, \cdots$, 使得

$$S_{f_r}\in\mathscr{B}^*_{h_r,h_r+r-1}\quad(r=2,\ 3\cdots), \tag{3}$$

$$\beta(f_r)\leqslant\beta(\Lambda-I)-h_r-r+2\quad(r=2,\ 3,\ \cdots). \tag{4}$$

由于这个定理的证明是十分复杂的,本书不予讨论. 现在,我们用它来推出

素数定理 对任意正数 A,一定有

$$\psi(x)=x+O(x(\ln x)^{-A}). \tag{5}$$

素数定理的第三个证明 用反证法:若(5)式对某个正数 A_0 不成立,则必有一串 $x_n\to\infty$, 使得

$$\frac{|\psi(x_n)-x_n|}{x_n}(\ln x_n)^{A_0}\to+\infty\ (n\to\infty). \tag{6}$$

由于 $\psi(x)-x=S_{\Lambda-I}(I)+O(1)$, 上式即

$$\frac{(\ln x_n)^{A_0}}{x_n}|(S_{\Lambda-I}(I))(x_n)|\to+\infty\quad(n\to\infty).$$

不妨假定对所有的 n, 有

$$\frac{(\ln x_n)^{A_0}}{x_n}\left|(S_{A-I}(I))(x_n)\right|>1,$$

因而有

$$\frac{1}{\ln\ln x_n}\ln\left|\frac{1}{x_n}(S_{A-I}(I))(x_n)\right|>-A_0,$$

即 $$\overline{\lim_{x\to\infty}}(\ln\ln x)^{-1}\ln\left|\frac{1}{x}S_{A-I}(I)\right|\geqslant -A_0,$$

(7) $$\beta(A-I)\leqslant A_0.$$

由(7)式知, 可以应用定理 1($B=A_0$), 得到一串满足条件(3)和(4)的算术函数 $f_2, f_3, \cdots$. 由(3)式和 § 5(7)式知

$$S_{f_r}(I)\ll xL^{h_r-1}\quad (r=2,\ 3,\ 4,\ \cdots),$$

所以

(8) $$\beta(f_r)\geqslant 1-h_r\quad (r=2,\ 3,\ \cdots)$$

由(4), (7)及(8)式得

$$1-h_r\leqslant A_0-h_r-r+2\quad (r=2,\ 3,\ \cdots)$$

即

(9) $$r-1\leqslant A_0\quad (r=2,\ 3,\ \cdots)$$

而这是不可能的, 因为 r 可取任意大的正整数. 这就证明了(5)式对任意正数 A 成立. ▌

最后, 我们应该指出, 在证明定理 1 时, 需要用到(5)式对某一个正数 A_1 成立, 这一点我们已在第二个证明中加以证明了. 在第六章 § 1 定理 1 中已经证明(5)式当 $A<\dfrac{1}{6}$ 时必成立.

第七章习题

1. 以 d 表示除数函数 $d(n)$. 试证明: (a) $d=I*I$; (b) $d^{-1}=\mu*\mu$.

2．设 f 是完全可乘函数，$g(1)\neq 0$．试证明：

(a) $(fg)^{-1}=fg^{-1}$；(b) $f^{-1}=\mu f$．

3．试证明§1中(21)、(22)、(23)式．

4．以 λ 表示 Liouville 函数 $\lambda(n)$（见第四章第3题）．试证明：

(a) $\lambda^{-1}=\mu^2$；(b) $\lambda*\mu^2=u$；(c) 求 $\lambda*u$．

5．试证明§2中(17)、(18)和(19)式．

6．试证明由§2中的(25)式可推出(24)式．

7．设 f 是完全可乘函数．试证明 $G=S_f(F)\Leftrightarrow F=S_{\mu f}(G)$．

8．试证明 $S_{\mu L}=-S_\mu^2 S_L$．

9．设 $\Lambda_m=\mu*L^m$．试证明 $S_{\Lambda_m}=P_m(S_\Lambda, S_{\Lambda L}, \cdots, S_{\Lambda L^{m-1}})$，多元多项式 P_m 的定义见§1中(29)式．

10．试证明 $|(S_{\mu L^m}S_I(\Phi))(x)|\leqslant(S_{\Lambda_m}(|\Phi|))(x)$．

11．以 Δ 表示函数 $[x]$．试证明 $S_\mu(\Delta)=I$ 及 $\Delta=S_I(I)$．

12．以 ψ 表示函数 $\psi(x)$．试证明

(a) $\psi=S_\mu S_L(I)$；(b) $S_L(I)=S_I(\psi)$．

13．设 $f*g=u$，$h=(fL)*g$．试证明：对正整数 m 有

$$S_f S_{gL^{m+1}}=(S_f S_{gL^m})_L-S_h(S_f S_{gL^m}).$$

14．试证明，$S_{\mu L^{m+1}}S_I=P_{m+1}(-S_\Lambda, \cdots, -S_{\Lambda L^m})$，多元多项式 P_{m+1} 的定义见§1 (29)式．

15．设 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$，则一定存在 $S_g\in\mathscr{B}_{h+m,n+m+1}$，使得

$$|(S_{fL^{m+1}}(I))(x)+(S_g(I))(x)|\leqslant\binom{h+m}{m+1}(S_{\Lambda_{m+1}}(|S_f I|))(x).$$

[提示：利用§3推论1和第10题]．

16．试证明§4中(58)式．

17．设正规映射 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$，则一定存在 $f_m\in\mathscr{B}_{h,n+m}$，使得 $0\leqslant(fL^m)(x)\leqslant f_m(x)$．[提示：利用§3中定理2和定理6($m=0$)证明结论对 $m=1$ 成立，且可取 $f_1=fL+h(\Lambda*f)$．再对 f_1 用§3定理6($m=0$)，继续 m 次即得所要结果]．

18．设 $S_f\in\mathscr{B}_{h,n}$ 是正规映射，l 为任给正整数．则当 $\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant x$ 时，一

致地有

$$\left|\sum_{y<k<x} f(k)\right| \ll (x-y)(\ln x)^{n-1} + x(\ln x)^{-l},$$

其中 $\ll$ 常数和 f、l 有关. [提示: 利用上题所找到的 f_m 及 § 5 定理 2(取 $\Phi=L$), 取 $m=l+h-1$.]

第 八 章

RIEMANN ZETA 函数

§1 定义与基本性质

在本章及以下各章中，s 表示复变量，σ 为其实部，t 为虚部，即

$$s=\sigma+it. \tag{1}$$

在定义 Riemann Zeta 函数之前，我们先简单地讨论一下一般的 Dirichlet 级数.

设 $a(n)$ 是一个算术函数，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s} \tag{2}$$

就称为 Dirichlet 级数. 它的每一项都是全平面内的解析函数. 关于函数项级数首先要讨论它的收敛区域以及和函数的性质. 对此，有以下初步结论：

引理 1 设 σ_0 是一实数，如果级数(2)当 $s=\sigma_0$ 时绝对收敛，则级数(2)在半平面 $\sigma\geqslant\sigma_0$ 上绝对一致收敛，其和函数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s} \tag{3}$$

在半平面 $\sigma>\sigma_0$ 内解析，且其各阶导数

$$f^{(k)}(s)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)(\ln n)^k}{n^s}, \tag{4}$$

上式右端的 Dirichlet 级数均在半平面 $\sigma>\sigma_0$ 内绝对一致收敛.

证 对任意的 $\sigma\geqslant\sigma_0$, 有

$$\left|\frac{c(n)}{n^s}\right|=\frac{|a(n)|}{n^\sigma}\leqslant\frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0}}, \tag{5}$$

故由假设及级数收敛性的比较判别法知，级数(2)在半平面 $\sigma\geqslant\sigma_0$ 上绝对一致收敛.

对任一固定的 $\lambda>\sigma_0$, 及固定的正整数 k, 当 $\sigma\geqslant\lambda$ 时, 有

$$\left|\frac{a(n)(\ln n)^k}{n^s}\right|\leqslant\frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0}}\frac{(\ln n)^k}{n^{\lambda-\sigma_0}}\ll\frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0}}, \tag{6}$$

这里的$\ll$常数仅和 k 及 $\lambda-\sigma_0$ 有关. 这就证明了(4)式右端的级数均在半平面 $\sigma>\sigma_0$ 内绝对一致收敛.

最后, 利用 Weierstrass 的解析函数项一致收敛级数的定理, 从级数(2)在半平面内一致收敛就可推出引理的其它结论. ∎

关于 Dirichlet 级数的乘法有下面的结果:

引理 2 设 $a(n)$、$b(n)$是两个算术函数, $c(n)$是它们的卷积, 即

$$c(n)=\sum_{lm=n}a(l)b(m). \tag{7}$$

再设 α 为一实数, 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s},\quad g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s} \tag{8}$$

均在半平面 $\sigma>\alpha$ 内绝对收敛. 则有

$$f(s)g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)}{n^s}, \tag{9}$$

上式右端的级数也在半平面 $\sigma>\alpha$ 内绝对收敛.

证 由于两个绝对收敛级数相乘可按通常的乘法乘出来, 并以任意次序聚项, 得到的级数也绝对收敛, 因而对任意

的 $\sigma>\alpha$ 有

$$f(s)g(s)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a(l)}{l^s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b(m)}{m^s}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{lm=n}\frac{a(l)}{l^s}\frac{b(m)}{m^s}\Big)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{lm=n}a(l)b(m)$$

(这里是把所有的 l 乘 m 相等的项聚在一起)，由此及(7)式就证明了引理. ∎

由于对任意的 $\lambda>1$ 及正数 k，正项级数

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}},$$

(11) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^{\lambda}}$$

收敛，所以由引理 1 知，Dirichlet 级数

(12) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

(13) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^s},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

均在半平面 $\sigma>1$ 内绝对一致收敛，其中 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数，$\Lambda(n)$ 为 Mangoldt 函数.

Riemann Zeta 函数就定义为

(14) $$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \sigma>1.$$

由引理 1 和 2 容易证明

定理 1 由(14)式定义的复变函数 $\zeta(s)$ 是半平面 $\sigma>1$ 内的解析函数；

(15) $$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},\ \sigma>1,$$

其中 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数；它的各阶导数

(16)

$$\zeta^{(k)}(s)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^s}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots),\ \sigma>1;$$

(17) $$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},\ \sigma>1,$$

其中 $\Lambda(n)$ 为 Mangoldt 函数; 以及有估计式

(18) $$\frac{\sigma-1}{\sigma}<|\zeta(s)|<\frac{\sigma}{\sigma-1}.$$

证 我们证明(15), (17)及(18)式, 其他的结论是引理 1 的显然推论(取 $a(n)\equiv1$).

由于(14)及(15)式右端的级数在半平面 $\sigma>1$ 内绝对(一致)收敛, 故在引理 2 中取

$$a(n)\equiv1,\ b(n)=\mu(n),$$

利用第二章 § 3(6)式可得

$$c(n)=\left[\frac{1}{n}\right],$$

因而

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=1,\ \sigma>1.$$

这就证明了(15)式. 这表明 $\zeta(s)$在半平面 $\sigma>1$ 内没有零点.

由于(14)式及(17)式右端的级数在半平面 $\sigma>1$ 内绝对(一致)收敛, 故可在引理 2 取

$$a(n)\equiv1,\ b(n)=\Lambda(n).$$

利用第二章 § 5(3)式得到

$$c(n)=\ln n.$$

因而 $$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^s},\ \sigma>1.$$

由此及(16)式($k=1$)即得(17)式.

最后证明估计(18)式. 我们有

$$|\zeta(s)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<1+\int_1^\infty\frac{du}{u^\sigma}=\frac{\sigma}{\sigma-1},\ \sigma>1,$$

及

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<\frac{\sigma}{\sigma-1},\ \sigma>1,$$

由以上两式即得(18)式. ▌

由于对任意的 $\sigma\geqslant1$, 函数 $u^{-\sigma}(\ln u)^k$ 当 $u\geqslant e^k$ 时是递减的, 故从(16)式可得: 对 $\sigma>1$ 及 $k\geqslant1$ 有

$$|\zeta^{(k)}(s)|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^\sigma}\ll\int_1^\infty\frac{(\ln u)^k}{u^\sigma}du=\frac{k!}{(\sigma-1)^k},$$

这里 $\ll$ 常数和 k 有关. 所以当 $k=1, 2, \cdots$ 时, 有

$$|\zeta^{(k)}(s)|\leqslant\frac{c(k)}{(\sigma-1)^{k+1}},\ \sigma>1. \tag{19}$$

同实变量 ζ 函数(见第三章 § 4)一样, 复变函数 $\zeta(s)$ 也可表为无穷乘积.

定理 2

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},\quad \sigma>1, \tag{20}$$

右端的无穷乘积在半平面 $\sigma>1$ 内一致收敛.

证 对任意的 $\sigma>1$ 及 $x>2$ 有

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right). \tag{21}$$

右端是有限个绝对收敛级数的乘积, 所以可按通常的乘法乘出来, 并以任意次序聚项, 所得的级数也绝对收敛. 由算术基本定理(第二章 § 2 引理 1)知, 所有乘得的项

$$\frac{1}{(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r})^s},\ 0\leqslant\alpha_l<\infty\quad(l=1, \cdots, r)$$

是两两不同的, 这里 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是不超过 x 的所有素数;

此外每一个正整数 n 如果它的素因子不超过 x，则 $\frac{1}{n^s}$ 必是其中的一项. 这样，就有

$$(22)\qquad \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^s},\ \sigma>1,$$

其中"$'$"表示对所有其素因子不超过 x 的正整数 n 求和. 当 $n\leqslant x$ 时，显然它的素因子必不大于 x，因而

$$(23)\qquad \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}+\sum_{n>x}{}'\frac{1}{n^s},\ \sigma>1.$$

由此可得

$$(24)\qquad \left|\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}-\zeta(s)\right|=\left|-\sum_{n>x}\frac{1}{n^s}+\sum_{n>x}{}'\frac{1}{n^s}\right|$$
$$\leqslant 2\sum_{n>x}\frac{1}{n^\sigma},\ \ \sigma>1,$$

对任意 $\sigma>1$，最后一个级数当 $x\to\infty$ 时趋于零，这就证明了在半平面 $\sigma>1$ 内，当 $x\to\infty$ 时，

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

一致收敛于 $\zeta(s)$，由于当 $\sigma>1$ 时 $\zeta(s)\neq 0$，这就证明了定理. ∎

由定理 2 及(15)式可立即推出

$$(25)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),\ \sigma>1,$$

右端的无穷乘积在半平面 $\sigma>1$ 内一致收敛，以及

$$(26)\qquad \ln\zeta(s)=-\sum_{p}\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right),\ \sigma>1,$$

右端的级数在半平面 $\sigma>1$ 内一致收敛，这里对数函数取定一支 $\ln 1=0$.

最后,我们要指出,定理2实际上是证明了由算术基本定理可以推出

$$(27) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},\ \sigma>1,$$

反过来,如果假定等式(27)成立,则可以证明算术基本定理成立. 所以等式(27)是算术基本定理的一个解析等价形式. 此外,我们也可用无穷乘积即(20)式来定义 $\zeta(s)$. 这样,由算术基本定理可推出(14)式成立. 但是这需要先讨论复的无穷乘积的性质,这里就不讲述了.

§2 解析开拓

现在我们利用 Euler 求和公式(第三章§1(10)式)把 $\zeta(s)$解析开拓到半平面 $\sigma>0$.

定理1 $\zeta(s)$可以解析开拓到半平面 $\sigma>0$, $s=1$ 是它的一级极点,留数为1.

证 在第三章§1(10)中取 $f(u)=u^{-s}$ 得

$$(1) \qquad \sum_{y<n\leqslant x}\frac{1}{n^s}=\frac{y^{1-s}-x^{1-s}}{s-1}-\frac{b_1(u)}{u^s}\Big|_y^x-s\int_y^x\frac{b_1(u)}{u^{s+1}}du.$$

当 $\sigma>1$ 时,令 $x\to+\infty$,由此及 $\zeta(s)$的定义(§1(4))得

$$(2) \qquad \zeta(s)=\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n^s}+\frac{y^{1-s}}{s-1}+\frac{b_1(y)}{y^s}-s\int_y^{\infty}\frac{b_1(u)}{u^{s+1}}du,$$

这里

$$(3) \qquad b_1(u)=u-[u]-\frac{1}{2}.$$

所以右端的无穷积分显然在半平面 $\sigma>0$ 内绝对一致收敛. 因而它是半平面 $\sigma>0$ 内的解析函数. 特别的,取 $y=1$,得

(4) $$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}-s\int_1^{\infty}\frac{b_1(u)}{u^{s+1}}du,\ \sigma>1.$$

由于右端是半平面 $\sigma>0$ 内的解析函数，$s=1$ 是它的一级极点，留数为1，因此利用(4)式就把 $\zeta(s)$ 解析开拓到半平面 $\sigma>0$，并证明了定理. ▌

事实上，$\zeta(s)$ 可以开拓为全平面内的解析函数，以 $s=1$ 为它的唯一的一级极点，留数为1. 但本书并不需要这一结果.

由(4)式及第三章§1(13)式可得

(5) $$\lim_{s\to1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{2}-\int_1^{\infty}\frac{b_1(u)}{u^2}du=\gamma.$$

$\zeta(s)-(s-1)^{-1}$ 在 $s=1$ 是解析的，所以可展为幂级数

(6) $$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s-1)^n.$$

可以证明

(7) $$a_n=\frac{\gamma_n}{n!}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

这里 γ_n 是由第三章§1(17)式给出的常数.

由(6)式可得到两个以后有用的公式：在 $s=1$ 附近有

(8) $$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+O(|s-1|),$$

(9) $$\zeta'(s)=\frac{-1}{(s-1)^2}+O(1),$$

这里的 O 常数都是绝对的. 进而，由以上两式立即可推出：在 $s=1$ 附近有

(10) $$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{-1}{s-1}+\gamma+\cdots+O(|s-1|),$$

这里的 O 常数也是绝对的.（证明留给读者.）

§ 3 $\zeta(1+it)\neq 0$

本节要证明 $\zeta(s)$的一个极其重要的性质：在直线 $\sigma=1$ 上 $\zeta(s)$没有零点，即

$$\zeta(1+it)\neq 0,\quad -\infty<t<+\infty. \tag{1}$$

这是利用 ζ 函数来证明素数定理的关键．证明是利用 $\zeta(s)$ 的无穷乘积(20)及下面的显然不等式：对任意实数 θ，有

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta=2(1+\cos\theta)^2\geqslant 0. \tag{2}$$

定理 1 (1)式成立．

证 由§1(26)式及

$$\ln(1-z)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m},\quad |z|<1,$$

得

$$\ln\zeta(s)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}},\quad \sigma>1. \tag{3}$$

两端取实部，得

$$\ln|\zeta(\sigma+it)|=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(mt\ln p)}{mp^{m\sigma}},\ \sigma>1. \tag{4}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&3\ln\zeta(\sigma)+4\ln|\zeta(\sigma+it)|+\ln|\zeta(\sigma+2it)|\\&=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{m\sigma}}\{3+4\cos(mt\ln p)+\cos(2mt\ln p)\}\\&\geqslant 0,\end{aligned} \tag{5}$$

最后一步用到了不等式(2)．因而有

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)|\geqslant 1,\ \sigma>1. \tag{6}$$

如果(1)式不成立，则必有一 $t_0\neq 0$ 使

$$\zeta(1+it_0)=0.$$

在(6)式中取 $t=t_0$，并改写为

$$((\sigma-1)\zeta(\sigma))^3\left|\frac{\zeta(\sigma+it_0)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2it_0)| \tag{7}$$

$$\geqslant\frac{1}{\sigma-1},\ \sigma>1.$$

由§2(8)式知，

$$\lim_{\sigma\to1}(\sigma-1)\zeta(\sigma)=1,$$

而由§2定理1知 $\zeta(s)$ 在 $1+it_0(t_0\neq0)$ 解析，因此

$$\lim_{\sigma\to1}\frac{\zeta(\sigma+it_0)}{\sigma-1}=\zeta'(1+it_0).$$

由以上两式知，(7)式的左端当 $\sigma\to1_+$ 时趋于极限

$$|\zeta'(1+it_0)|^4|\zeta(1+2it_0)|,$$

这是一有限数，而(7)式的右端当 $\sigma\to1_+$ 时趋于无穷. 这一矛盾就证明了定理. ∎

§4 在直线 $\sigma=1$ 附近的估计

§1中估计式(18)与(19)显然不能用于直线 $\sigma=1$ 上，而且在该直线附近亦不能得到好的估计. 为了得到这种估计就需要利用 $\zeta(s)$ 的解析开拓表达式(§2(2)式). 为了避免 $s=1$ 是极点的麻烦，代替 $\zeta(s)$ 我们考虑半平面 $\sigma>0$ 内的解析函数

$$\eta(s)=\zeta(s)-\frac{1}{s-1}. \tag{1}$$

在 $s=1$ 附近它有展开式§2(6)式，以及由此得到的渐近公式§2(8)及§2(9)式.

定理 1 对 $k=0,1,2,\cdots$，有

(2) $$|\eta^{(k)}(s)|\leqslant c(k)\ln^{k+1}(|t|+2),\ \sigma\geqslant 1,$$

其中 $c(k)$ 是仅依赖于 k 的常数.

证 由 §2(2)式得: 当 $\sigma>0$ 时, 有

(3)
$$\eta(s)=\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n^s}+\frac{y^{1-s}-1}{s-1}+\frac{b_1(y)}{y^s}-s\int_y^\infty\frac{b_1(u)}{u^{s+1}}du$$
$$=\eta_1(s)+\eta_2(s)+\eta_3(s)-\eta_4(s).$$

现取 $y=|t|+2$. $\eta_1(s)$ 是全平面内的解析函数,

(4) $$\eta_1^{(k)}(s)=\sum_{n\leqslant y}\frac{(-1)^k\ln^k n}{n^s},$$

当 $\sigma\geqslant 1$ 时,

(5)
$$|\eta_1^{(k)}(s)|\leqslant\sum_{n\leqslant y}\frac{\ln^k n}{n}\leqslant c_1(k)\ln^{k+1}y=c_1(k)\ln^{k+1}(|t|+2),$$

其中 $c_1(k)$ 为一仅依赖于 k 的常数.

(6) $$\eta_2(s)=-\int_1^y u^{-s}ds,$$

所以亦是全平面内的解析函数,

(7) $$\eta_2^{(k)}(s)=(-1)^{k+1}\int_1^y u^{-s}\ln^k u\,du.$$

当 $\sigma\geqslant 1$ 时,

(8) $$|\eta_2^{(k)}(s)|\leqslant\int_1^y\frac{\ln^k u}{u}du=\frac{1}{k+1}\ln^{k+1}y$$
$$=\frac{1}{k+1}\ln^{k+1}(|t|+2).$$

$\eta_3(s)$ 亦是全平面内的解析函数,

$$\eta_3^{(k)}(s)=(-1)^k b_1(y)y^{-s}\ln^k y.$$

当 $\sigma\geqslant 1$ 时，由于函数 $y^{-1}\ln^k y(y>1)$ 在 $y=e^k$ 取最大值，故有

$$|\eta_3^{(k)}(s)|\leqslant\frac{\ln^k y}{y}\leqslant\left(\frac{k}{e}\right)^k. \tag{9}$$

最后讨论 $\eta_4(s)$，它在半平面 $\sigma>0$ 内解析.

(10)

$$\eta_4^{(k)}(s)=k\int_y^\infty\frac{b_1(u)}{u^{s+1}}du+(-1)^k s\int_y^\infty\frac{b_1(u)\ln^k u}{u^{s+1}}du,$$

当 $1\leqslant\sigma\leqslant 2$ 时，利用分部积分，可得

$$\begin{aligned}|\eta_4^{(k)}(s)|&\leqslant\frac{k}{y}+(|t|+2)\int_y^\infty\frac{\ln^k u}{u^2}du\\&=\frac{k}{y}+(|t|+2)\left\{\frac{\ln^k y}{y}+\frac{k\ln^{k-1}y}{y}+\cdots+\frac{k!}{y}\right\}\\&\leqslant c_2(k)\ln^k(|t|+2).\end{aligned}\tag{11}$$

综合(5)、(8)、(9)、(11)式，就证明了估计式(2)当 $1\leqslant\sigma\leqslant 2$ 时是成立的. 而当 $\sigma>2$ 时，

$$\begin{aligned}|\eta^{(k)}(s)|&=\left|\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^k\ln^k n}{n^s}+\frac{(-1)^{k-1}k!}{(s-1)^{k+1}}\right|\\&\leqslant\sum_{n=1}^\infty\frac{\ln^k n}{n^2}+k!\leqslant c_3(k),\end{aligned}$$

所以估计式(2)亦成立. ▌

特别的，由(2)式可得：当 $\sigma\geqslant 1$, $|t|\geqslant 2$ 时，

$$|\zeta^{(k)}(s)|\leqslant c_4(k)(\ln|t|)^{k+1}\quad(k=0,1,2,\cdots). \tag{12}$$

其中 $c_4(k)$ 为仅依赖于 k 的常数.

显然，估计式(2)及(12)仅当 σ 充分接近于1时才是有用的. 当 $\sigma\geqslant\sigma_0>1$ 时，则利用估计式§1(18)式和§1(19)式

较好些．有时往往把两者结合起来应用．

下面来证明$|\zeta(s)|$在半平面$\sigma\geqslant 1$上的下界估计式．

定理 2 存在正常数c_5，使得

$$\frac{1}{|\zeta(s)|}\leqslant c_5\ln^7(|t|+2),\ \sigma\geqslant 1 \tag{13}$$

证 当$\sigma\geqslant 2$时，由估计式§1(18)式知定理显然成立．而当$|t|\leqslant 2$, $1\leqslant\sigma\leqslant 2$时，$\zeta^{-1}(s)$是这闭矩形上的解析函数，故$|\zeta(s)|^{-1}$有上界，故定理亦成立．因此，再注意到$\zeta(\bar{s})=\overline{\zeta(s)}$，我们只要对

$$1\leqslant\sigma<2,\ t>2 \tag{14}$$

来证明(13)式．这时，由§3(6)式、§1(18)式及本节(2)式$(k=0)$可推得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|}&\leqslant(\zeta(\sigma))^{\frac{3}{4}}|\zeta(\sigma+2it)|^{\frac{1}{4}}\\&\leqslant c_6\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{\frac{3}{4}}\ln^{\frac{1}{4}}t,\ t\geqslant 2.\end{aligned} \tag{15}$$

对任意正数λ，当

$$1+\frac{\lambda}{(\ln t)^9}\leqslant\sigma<2,\ t>2$$

时，由(15)式得

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|}\leqslant c_6\lambda^{-\frac{3}{4}}\ln^7 t. \tag{16}$$

而当

$$1\leqslant\sigma<1+\frac{\lambda}{(\ln t)^9}=\sigma_0,\ t>2 \tag{17}$$

时，由(2)式$(k=1)$、(16)式，及

$$\zeta(\sigma+it)=\zeta(\sigma_0+it)-\int_\sigma^{\sigma_0}\zeta'(u+it)du,$$

可得

$$(18)\qquad |\zeta(\sigma+it)|\geqslant|\zeta(\sigma_0+it)|-\int_\sigma^{\sigma_0}|\zeta'(u+it)|dt$$

$$\geqslant c_6^{-1}\lambda^{\frac{3}{4}}\ln^{-7}t-c_7(\sigma_0-\sigma)\ln^2 t$$

$$\geqslant(c_6^{-1}-c_7\lambda^{\frac{1}{4}})\lambda^{\frac{3}{4}}\ln^{-7}t.$$

现取 λ 满足

$$(19)\qquad c_6^{-1}=2c_7\lambda^{\frac{1}{4}}.$$

这样，当(17)式成立时，由(18)式得

$$(20)\qquad |\zeta(\sigma+it)|\geqslant 2^{-4}c_6^{-4}c_7^{-3}\ln^{-7}t.$$

由此及(16)式就证明了：当条件(14)式成立时，有

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|}\leqslant 2^4c_6^4c_7^3\ln^7 t.$$

这就证明了定理. ▌

以后我们需要讨论函数

$$(21)\qquad h(s)=\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1},$$

及

$$(22)\qquad h_1(s)=\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\zeta(s)=h(s)+\eta(s).$$

由§2(6)式知 $h(s)$ 在 $s=1$ 解析，再由于 $\zeta(1+it)\neq 0$ (见§3定理1)就推出 $h(s)$ 在半平面 $\sigma\geqslant 1$ 上的每一点都解析，特别是在直线 $\sigma=1$ 的每一点解析. 由于 $\eta(s)$ 是半平面 $\sigma>0$ 内的解析函数，因此 $h_1(s)$ 亦在半平面 $\sigma\geqslant 1$ 上的每一点都解析，特别的，在直线 $\sigma=1$ 的每一点解析.

由定理1及2可以得到 $h(s)$ 及 $h_1(s)$ 的各阶导数在半平面 $\sigma\geqslant 1$ 上的上界估计.

定理 3 对于 $\sigma \geqslant 1$ 有

(23)
$$|h^{(k)}(s)| \leqslant c_8(k)(\ln(|t|+2))^{9(k+1)} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

及

(24)
$$|h_1^{(k)}(s)| \leqslant c_9(k)(\ln(|t|+2))^{9(k+1)} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

其中 $c_8(k)$, $c_9(k)$ 是仅和 k 有关的常数.

证 我们只要证(23)式. 由此利用(22)式及定理 1 即可推出(24)式.

由上面指出的 $h(s)$ 的解析性可知,一定有一充分小的正数 δ,使 $h(s)$ 在矩形 $1-\delta \leqslant \sigma \leqslant 2$, $|t| \leqslant 2$ 上解析,所以函数本身及其各阶导数在其上有界, 因而(23)式成立. 而当 $\sigma > 2$ 时由 § 1(17)式知

$$h^{(k)}(s) = (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \ln^k n}{n^s} + \frac{(-1)^k k!}{(s-1)^k}, \tag{25}$$

因而有

$$|h^{(k)}(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{k+1}}{n^2} + k! = c_{10}(k), \ \sigma > 2, \tag{26}$$

所以估计式(23)亦成立. 这样,我们只要对

$$1 \leqslant \sigma \leqslant 2, \ |t| \geqslant 2 \tag{27}$$

证明(23)式. 这时

$$h^{(k)}(s) = \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)^{(k)} + \frac{(-1)^k k!}{(s-1)^{k+1}}. \tag{28}$$

当(27)式成立时

$$\left|\frac{(-1)^k k!}{(s-1)^{k+1}}\right| \leqslant \frac{k!}{2^{k+1}}. \tag{29}$$

容易看出，利用求导公式求出

$$\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)^{(k)}$$

后所得到的每一项是这样的形式：

$$a_{l_1l_2\cdots l_r}\frac{\zeta^{(l_1)}\zeta^{(l_2)}\cdots\zeta^{(l_r)}}{\zeta^{k+1}},\ l_1+l_2+\cdots+l_r=k+1. \tag{30}$$

由(12)式及(13)式知这样的项的绝对值

$$\leqslant c_{11}(k)(\ln|t|)^{l_1+1}(\ln|t|)^{l_2+1}\cdots(\ln|t|)^{l_r+1}(\ln|t|)^{7(k+1)}$$
$$\leqslant c_{11}(k)(\ln|t|)^{9(k+1)},$$

这里用到了 $r\leqslant k+1$ 及

$$(l_1+1)+(l_2+1)+\cdots+(l_r+1)=(k+1)+r\leqslant 2(k+1).$$

因而当条件(27)成立时，有

$$\left|\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)^{(k)}\right|\leqslant c_{12}(k)(\ln|t|)^{9(k+1)}. \tag{31}$$

由此及(29)式就证明了估计式(23)在条件(27)下亦成立. ∎

容易证明，当 $\sigma\geqslant 1$, $|t|\geqslant 2$ 时，

$$\ln\zeta(s)\ll(\ln|t|)^9. \tag{32}$$

有关本章内容可参看 Apostol [1]，闵嗣鹤 [1] 及 Titchmarsh[2].

第八章习题

1. 利用 Abel 恒等式(第三章 § 1. 引理 1)证明当 $\sigma>1$ 时有：

(a) $\zeta(s)=s\int_1^\infty[x]x^{-s-1}dx$;

(b) $\zeta^{-1}(s)=s\int_1^\infty\left(\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\right)x^{-s-1}dx$;

(c) $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=s\int_1^\infty\psi(x)x^{-s-1}dx$;

(d) $\zeta^2(s)=s\int_1^{\infty}(\sum_{n<x}d(n))x^{-s-1}dx$.

2. 试证明: 当 $\sigma>1$ 时以下等式成立:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_a(n)n^{-s}=\zeta(s)\zeta(s-a)$, a 为复数, $\sigma_a(n)$ 由第二章第 32 题给出, $\sigma>1+\operatorname{Re}a$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}d(n^2)n^{-s}=\zeta^3(s)\zeta^{-1}(2s)$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(d(n))^2n^{-s}=\zeta^4(s)\zeta^{-1}(2s)$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{\omega(n)}n^{-s}=\zeta^2(s)\zeta^{-1}(2s)$; $\omega(n)$ 表示 n 的不同的素因子个数, $\omega(1)=0$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)n^{-s}=\zeta(s)\sum_{p}p^{-s}$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^2(n)n^{-s}=\zeta(s)\zeta^{-1}(2s)$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)n^{-s}=\zeta(2s)\zeta^{-1}(s)$, $\lambda(n)$ 见第四章第 3 题.

3. 设 $f(n)$ 是完全可乘函数. 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}c(n)n^{-s}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b(n)n^{-s}\right),$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}c(n)f(n)n^{-s}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a(n)f(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b(n)f(n)n^{-s}\right),$$

这里假定这些级数均在某一半平面内绝对收敛.

4. 在上题中取 $f(n)=\lambda(n)$(见第四章第 3 题), $\sum_{n=1}^{\infty}c(n)n^{-s}$ 为第 2 题各小题中的左端的各个级数, 试求 $\sum_{n=1}^{\infty}c(n)\lambda(n)n^{-s}$ 所确定的函数.

5. 设 $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)n^{-s}$ 当 $\sigma>a$ 时绝对收敛, $f(1)=0$. 试证明: 当 $\sigma>a$ 时, 沿直线 $\operatorname{Im}w=t$, $\operatorname{Re}w\geqslant\sigma$ 上的积分

$$\int_{\sigma+it}^{+\infty+it}F(w)dw=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f(n)}{\ln n}n^{-s}.$$

6. 设 $f(n)$ 为完全可乘函数, $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}f^{-s}(n)n^{-s}$ 当 $\sigma>a$ 时绝对收敛.

试证明：当 $\sigma>a$ 时有：(a) $F(s)\neq 0$，$(F(s))^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)f(n)n^{-s}$；

(b) $-\frac{F'(s)}{F(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)f(n)n^{-s}$；(c) $\ln F(s)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)f(n)}{\ln n}n^{-s}$.

7. 利用恒等式 $\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)'+\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)^2=\frac{\zeta''(s)}{\zeta(s)}$，$\sigma>1$，证明 Selberg 恒等式：$\Lambda(n)\ln n+(\Lambda*\Lambda)(n)=(\mu*L^2)(n)$ 即 $\Lambda_2=\mu*L^2$.（这里所用的符号见第七章 § 1.）

8. 利用恒等式 $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\zeta(s)-2\gamma=\frac{1}{\zeta(s)}(-\zeta'(s)-\zeta^2(s)-2\gamma\zeta(s))$，试证明 $\Lambda(n)-1-2\gamma\left[\frac{1}{n}\right]=\sum_{lm=n}\mu(l)(\ln m-d(m)-2\gamma)$. 由此可推出第四章 § 1(15)式.

9. 试证明：当 $\sigma>1$ 时，有：(a) $\ln\zeta(s)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\ln n}n^{-s}$；(b) $\ln\zeta(s)=s\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}dx$.

10. 若当 $x\to+\infty$ 时，$\sum_{n\leqslant x}a(n)\sim x$，则当 $\sigma>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$ 绝对收敛，且当 $\sigma\to 1_+$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-\sigma}\sim\frac{1}{\sigma-1}$.

11. 若当 $x\to\infty$ 时，$\sum_{n\leqslant x}a(n)\sim x\ln^k x$，$k$ 为正整数，则当 $\sigma>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$ 绝对收敛，且当 $\sigma\to 1_+$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-\sigma}\sim\frac{k!}{(\sigma-1)^k}$.

12. 试证明 § 2(10)式.

13. 设 $b_1(u)=u-[u]-\frac{1}{2}$. 定义函数列

$$\begin{cases} b_{l+1}(u)-b_{l+1}(0)=\int_0^u b_l(u)du \quad (l=1,2,\cdots), \\ \int_0^1 b_{l+1}(u)du=0 \quad (l=1,2,\cdots). \end{cases}$$

试证明：这样定义的函数列是唯一确定的，且所有的 $b_l(u)$ 均以1为周期.

14. 试证明

$$b_2(u)=\frac{1}{2}(u-[u])^2-\frac{1}{2}(u-[u])+\frac{1}{12};$$

$$b_3(u)=\frac{1}{6}(u-[u])^3-\frac{1}{2}(u-[u])^2+\frac{1}{12}(u-[u]);$$

$$b_4(u)=\frac{1}{24}(u-[u])^4-\frac{1}{12}(u-[u])^3+\frac{1}{24}(u-[u])^2-\frac{1}{720}.$$

如何用 $b_1(u)$ 来表示 $b_2(u)$、$b_3(u)$ 和 $b_4(u)$.

15. 试证明以下的 Fourier 级数展式成立:

$$b_1(u)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n\pi}\sin 2n\pi u \quad (u\neq\text{整数});$$

$$b_{2l}(u)=(-1)^{l-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^{2l}}\cos 2n\pi u \quad (l=1,\ 2,\ \cdots);$$

$$b_{2l+1}(u)=(-1)^{l-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n\pi)^{2l+1}}\sin 2n\pi u \quad (l=1,\ 2,\ \cdots).$$

由此推出: (a) $b_{2l}(u)$ 是偶函数, $b_{2l}(0)=(-1)^{l-1}\dfrac{2}{(2\pi)^{2l}}\zeta(2l)$, $|b_{2l}(u)|\leqslant|b_{2l}(0)|$; (b) $b_{2l-1}(u)$ 是奇函数, $b_{2l+1}(0)=0$ $(l=1,\ 2,\ \cdots)$.

16. 设 l 是正整数, $f(u)$ 在区间 $[y,\ x]$ 上 l 次连续可导. 试证明

$$\sum_{y<n\leqslant x}f(n)=\int_y^x f(u)du+\sum_{j=1}^{l}(-1)^j b_j(u)f^{(j-1)}(u)\Big|_y^x$$

$$+(-1)^{l+1}\int_y^x b_l(u)f^{(l)}(u)du.$$

17. 设 $\sigma>1$, $x\geqslant1$. 试证明: 对任意正整数 $l\geqslant2$, 有

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}-\frac{x^{1-s}}{1-s}+\frac{b_1(x)}{x^s}$$

$$+\sum_{j=2}^{l}s(s+1)\cdots(s+j-2)\frac{b_j(x)}{x^{s+j-1}}$$

$$-s(s+1)\cdots(s+l-1)\int_x^{\infty}\frac{b_l(u)}{u^{s+l}}du.$$

由此证明 $\zeta(s)$ 可解析开拓到 $\sigma>-l+1$ (实际上可证明开拓到 $\sigma>-l$). 因而 $\zeta(s)$ 可解析开拓到全平面, $s=1$ 为其唯一的一级极点.

18. 按下述步骤试证明 § 2(7) 式: (a) 求函数 $F(s)=s\int_1^{\infty}b_1(u)u^{-s-1}du$ 在点 $s=1$ 的幂级数展开式, 证明当 $n=1,\ 2,\ \cdots$ 时有

$$F^{(n)}(s)\big|_{s=1}=(-1)^{n-1}\lim_{N\to\infty}\int_1^N b_1(u)\frac{d}{du}\left(\frac{\ln^n u}{u}\right)du;$$

(b) 对上式右端的积分应用第三章 § 1(10) 式; (c) 利用 § 2(4) 式

即可推出§2(7)式.

19. 试证明: 当 $\sigma>1$ 时, 对所有的 t, 有

$$\zeta^5(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^8|\zeta(\sigma+2it)|^4|\zeta(\sigma+3it)|\geqslant 1.$$

由此证明 $\zeta(1+it)\neq 0$.

20. 以下是 Hadamard 证明 $\zeta(1+it)\neq 0$ 的方法. (a)假定 $1+it_0$ 是 $\zeta(s)$的零点. 设 $\sigma>1$.

$$S=\sum_p\frac{1}{p^\sigma},\quad P=\sum_p\frac{\cos(t_0\ln p)}{p^\sigma},\quad Q=\sum_p\frac{\cos(2t_0\ln p)}{p^\sigma},$$

证明对任意正数 ε, 必有正数 δ, 使当 $\sigma-1\leqslant\delta$ 时, $P<-(1-\varepsilon)S$; (b)对任意给定的 α, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, 设 $\sigma>1$,

$$S'=\sum_p{}'\frac{1}{p^\sigma},\ S=S'+S'',\lambda=S'/S,$$

其中 $\sum_p{}'$ 表示对所有满足以下条件的 p 求和:

$(2k+1)\pi-\alpha\leqslant t_0\ln p\leqslant(2k+1)\pi+\alpha\quad(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$.

试证明: 当 $\sigma-1\leqslant\delta$ 时, $(1-\lambda)(1-\cos\alpha)<\varepsilon$; $\left[\text{提示: 考虑 } P'=\sum_p{}'\frac{\cos(t_0\ln p)}{p^\sigma},\ P=P'+P''.\right]$(c) 证明 $Q\geqslant S(\lambda\cos 2\alpha-1+\lambda)$; $\left[\text{提示: 考虑 } Q'=\sum_p{}'\frac{\cos(2t_0\ln p)}{p^\sigma},\ Q=Q'+Q''.\right]$(d) 当 $\sigma>1$ 时, 有 $\ln\zeta(s)=\sum_p\frac{1}{p^s}+f(s)$, $f(s)$ 在 $\sigma>\frac{1}{2}$ 内解析, 且当 $\sigma\to 1_+$ 时, $\sum_p\frac{1}{p^\sigma}\sim\ln\frac{1}{\sigma-1}$; (e)当 $\sigma\to 1_+$ 时, $\ln|\zeta(\sigma+2it_0)|\sim Q$. 由此推出矛盾.

21. 在上题的符号下, 试证明: (a) $P^2\leqslant\frac{1}{2}(S+Q)S$; (b) 若 $1+it_0$ 是 $\zeta(s)$的零点, 利用(a)可证明 $1+2it_0$ 是 $\zeta(s)$的极点. 由此推出 $\zeta(1+it)\neq 0$.

22. 试证明: 对任给的正数 A 及整数 $k\geqslant 0$, 在区域 $\sigma\geqslant 1-A(\ln(|t|+2))^{-1}$ 中, 有估计

$$|\eta^{(k)}(s)|\leqslant C_1(k,\ A)(\ln(|t|+2))^{k+1},$$

及
$$|\zeta^{(k)}(s)|\leqslant C_2(k,\ A)(\ln|t|)^{k+1}\quad(|t|\geqslant 2),$$

其中 $\eta(s)$由 § 4(1)式给出，$C_1(k, A)$、$C_2(k, A)$为与 k, A 有关的常数.

23．试证明：(a)存在正常数 C_1 使当 $\sigma>1$, $|t|\geqslant 2$ 时，有$|\zeta(\sigma+it)|>C_1(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}(\ln|t|)^{-\frac{1}{4}}$；(b)存在正常数 C_2，使当 $|t|\geqslant 2$ 时，有 $|\zeta(1+it)|\geqslant C_2(\ln|t|)^{-7}$；$\left[\text{提示: 利用(a)及} \int_1^\sigma \zeta'(u+it)du=\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it).\right]$(c) 存在正常数 C_3，使得在区域 $\sigma\geqslant 1-C_3(\ln(|t|+2))^{-9}$ 中，$\zeta(s)$无零点，且有估计 $\frac{1}{\zeta(s)}\ll(\ln(|t|+2))^7$；$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\ll(\ln(|t|+2))^9$, $|t|\geqslant 2$; $\ln\zeta(s)\ll(\ln(|t|+2))^9$, $|t|\geqslant 2$.

24．把 § 4 中的定理 3 中的估计亦推广到上题(c)中所说的区域.

第 九 章

几个 TAUBER 型定理

为了不离题太远，本章将只证明几个与素数定理有关的特殊的 Tauber 型定理. 对于 Tauber 型定理与发散级数求和的一般理论有兴趣的读者可参看 Widder[1] 第五章，潘承洞、于秀源[1] 第九、十章.

§1 两个最简单的定理

设 $f(u)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的实函数，在任意有限区间 $[0, x]$ 上可积. 如果

(1) $$f(u)\to a \quad (u\to+\infty),$$

则很容易证明(留给读者)

(2) $$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du\to a \quad (x\to+\infty).$$

一般说来，这一结论的逆命题是不成立的(试举例说明). 在第五章 § 3 引理 2 中已经给出了使这逆命题成立的一个充分条件——$uf(u)$ 是递增函数. 这是最简单的 Tauber 型定理. 为了便于比较，在此复述于下：

定理 1 设 $f(u)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的实函数，在任意有限区间 $[0, x]$ 上可积. 再设 $uf(u)$ 是递增函数. 那么，若(2)式成立，则(1)式也成立.

另一个差不多的定理是：

定理 2 在定理 1 的符号和条件下，若

(3) $$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du \sim ax^{c-1} \quad (x\to+\infty),$$

则

(4) $$f(u)\sim cau^{c-1} \quad (u\to+\infty).$$

证 设 δ 是任意正数 $0<\delta<1$. 由(3)式得

$$\int_x^{(1+\delta)x} f(u)du = ax^c((1+\delta)^c-1)+o(x^c)\ (x\to+\infty).$$

而由 $uf(u)$ 的递增性可得

$$xf(x)\frac{\delta}{1+\delta}\leqslant\int_x^{(1+\delta)x} f(u)du\leqslant xf((1+\delta)x)\delta.$$

因而有

$$\frac{f(x)}{x^{c-1}}\frac{\delta}{(1+\delta)}\leqslant a((1+\delta)^c-1)+o(1)$$
$$\leqslant\frac{f((1+\delta)x)}{((1+\delta)x)^{c-1}}(1+\delta)^{c-1}\delta \quad (x\to+\infty).$$

由此推出，对固定的正数 δ，有

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{c-1}}\leqslant a(1+\delta)\frac{(1+\delta)^c-1}{\delta}$$

及

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{c-1}}=\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f((1+\delta)x)}{((1+\delta)x)^{c-1}}$$
$$\geqslant\frac{a}{(1+\delta)^{c-1}}\frac{(1+\delta)^c-1}{\delta}.$$

利用 $$\lim_{\delta\to0}\frac{(1+\delta)^c-1}{\delta}=c,$$

令 $\delta\to0_+$，由以上两式即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{c-1}}=ac,$$

这就证明了(4)式. ∎

§ 2* Hardy-Littlewood 定理

下面的 Tauber 型定理属于 Hardy-Littlewood([1]), 这里的证明是 J. Karamata([1]或[函]§§7.51~7.53)给出的.

定理 1 设数列 $a_n \geqslant 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$. 若

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{a}{1-x}, \ x \to 1_-,$$

则

(2) $$\sum_{n=0}^{N} a_n \sim aN, \qquad N \to \infty.$$

下面先证明几个引理:

引理 1 在定理 1 的条件, 对任意多项式 $p(u)$, 有

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n p(x^n) \sim \frac{a}{1-x}\int_0^1 p(u)\,du, \ x \to 1_-.$$

证 显然只要对 $p(u)=u^m (m=0, 1, 2, \cdots)$ 来证明. 由(1)式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n x^{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^{m+1})^n \sim \frac{a}{1-x^{m+1}}$$
$$= \frac{a}{1-x}\,\frac{1-x}{1-x^{m+1}}, \ x \to 1_-.$$

由此及 $$\frac{1-x}{1-x^{m+1}} \sim \frac{1}{m+1} = \int_0^1 u^m\,du, \ x \to 1_-$$

就证明了(3)式对 $p(u)=u^m$ 成立. ∎

为了证明引理 1 对任意连续函数都成立, 需要关于连续函数的多项式逼近的 Weierstrass 定理.

引理 2 设 $g(u)$ 是[0, 1]区间上的连续实函数. 那么, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 必有多项式 $p(u)$, 使得

(4) $$|g(u)-p(u)|<\varepsilon \quad (0\leqslant u\leqslant 1).$$

证明见[实]第四章§5定理2,或[数]第四篇第六章§9.三,3°.

引理3 在定理1的条件下,对[0, 1]区间上的任一实连续函数 $g(u)$,有

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \sim \frac{a}{1-x}\int_0^1 g(u)\,du,\ x\to 1_-.$$

证 对任给的 $\varepsilon>0$, 设 $p(u)$是满足(4)式的多项式, 由于 $a_n\geqslant 0$,故有

(6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n p_1(x^n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n p_2(x^n) \quad (0\leqslant x<1),$$

其中

(7) $$p_1(u)=p(u)-\varepsilon<g(u)<p(u)+\varepsilon=p_2(u).$$

由引理1知

$$\varliminf_{x\to 1_-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \geqslant \varliminf_{x\to 1_-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n p_1(x^n)$$
$$=a\int_0^1 p_1(u)\,du > a\int_0^1 g(u)\,du - 2a\varepsilon,$$

及

$$\varlimsup_{x\to 1_-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n g(x^n) \leqslant \varlimsup_{x\to 1_-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n p_2(x^n)$$
$$=a\int_0^1 p_2(u)\,du < a\int_0^1 g(u)\,du + 2a\varepsilon.$$

由于 ε 的任意性,由以上两式即得(5)式. ▌

定理1的证明 设

$$g_0(u)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant u<\dfrac{1}{e};\\[2ex] \dfrac{1}{u}, & \dfrac{1}{e}\leqslant u\leqslant 1. \end{cases}$$

再设整数 $k\geqslant 4$,

$$g_k^+(u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u<\left(\frac{1}{e}-\frac{2}{ek}\right);\\ \frac{e^2k}{2}\left(u-\left(\frac{1}{e}-\frac{2}{ek}\right)\right), & \frac{1}{e}-\frac{2}{ek}\leqslant u<\frac{1}{e};\\ \frac{1}{u}, & \frac{1}{e}\leqslant u\leqslant 1,\end{cases}$$

及

$$g_k^-(u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u<\frac{1}{e};\\ \frac{e^2k^2}{2k+4}\left(u-\frac{1}{e}\right), & \frac{1}{e}\leqslant u<\frac{1}{e}+\frac{2}{ek};\\ \frac{1}{u}, & \frac{1}{e}+\frac{2}{ek}<u\leqslant 1.\end{cases}$$

显然, $g_k^+(u)$, $g_k^-(u)$ 均为[0, 1]区间上的连续函数, 且满足

$$g_k^-(u)\leqslant g_0(u)\leqslant g_k^+(u)\quad(0\leqslant u\leqslant 1). \tag{8}$$

容易推出

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 g_k^+(u)du=\lim_{k\to\infty}\int_0^1 g_k^-(u)du=\int_0^1 g_0(u)du=1. \tag{9}$$

由(8)式及 $a_n\geqslant 0$ 可得: 对任意的 k, 有

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng_k^-(x^n)\leqslant(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng_0(x^n)$$

$$\leqslant(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng_k^+(x^n),\ (0\leqslant x<1).$$

由此及引理 3 即得

$$\varliminf_{x\to 1_-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng_0(x^n)\geqslant\varliminf_{x\to 1_-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng_k^-(x^n)$$

$$=a\int_0^1 g_k^-(u)du,$$

及

$$\overline{\lim_{x\to 1_-}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng_0(x^n)\leqslant\overline{\lim_{x\to 1_-}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng_k^+(x^n)$$
$$=a\int_0^1 g_k^+(u)du.$$

令 $k\to\infty$，由以上两式及(9)式即得

(10) $$\lim_{x\to 1_-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng_0(x^n)=a\int_0^1 g_0(u)du=a.$$

现取 $x=e^{-\frac{1}{N}}$，N 为自然数，有

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ng_0(x^n)=(1-e^{-\frac{1}{N}})\sum_{n=0}^{N}a_n.$$

此外

$$\lim_{N\to\infty}N(1-e^{-\frac{1}{N}})=1$$

由以上三式即得(2)式. ▌

附注 1. 事实上可以证明引理 3 对[0, 1]区间上的任一具有第一类间断点的函数都成立. 而定理 1 的证明是利用了只有一个第一类间断点的特殊的函数 $g_0(u)$（见(10)式）.

2. 对任意数列 a_n，若(2)式成立，则(1)式必成立.（证明留给读者）

§3* 关于权函数 $\hat{k}_\lambda(x)$ 的 Tauber 型定理

首先，我们引进关于慢递减函数的定义：设 $f(x)$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$上的实函数，若满足条件

(1) $$\underline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ \Delta x\to 0_+}}}(f(x+\Delta x)-f(x))\geqslant 0,$$

则称 $f(x)$是慢递减函数，这里 x, Δx 是两个独立变量.

显然，递增函数一定是慢递减函数. 但递减函数不一定不是. 例如，$f(x)=-x$，

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ \Delta x\to 0_+}}(-(x+\Delta x)+x)=0,$$

所以也是慢递减函数. 但 $f(x)=-x^2$ 就不是, 因为

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ \Delta x\to 0}}(-(x+\Delta x)^2+x^2)$$
$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ \Delta x\to 0_+}}(-2x\Delta x-\Delta x^2)=-\infty.$$

这是由于 $-x^2$ 递减得太快的缘故.

定理 1 设 $f(x)$ 是有界的慢递减函数, 且对任意的 $\lambda>0$, 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)f(u)\,du=a, \tag{2}$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a, \tag{3}$$

其中

$$\hat{k}_\lambda(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\right)^2. \tag{4}$$

证 由于对 $\lambda>0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x)\,dx&=\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sin\lambda x)^2}{x^2}\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2u}{u^2}\,du\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2u}{u}\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=1,\end{aligned} \tag{5}$$

最后一个积分的计算见【微】第 455 款 3°, 或【数】第四篇第五章 § 3[例 1], 所以可假定 $a=0$; 因为, 不然可用 $f(x)-a$ 代替 $f(x)$, $f(x)-a$ 仍然是有界慢递减函数.

用反证法: 若(3)式不成立, 则必有 $\delta>0$ 及一串实数

$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, (x_n\to+\infty)$，使得有

$$f(x_n)>\delta \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{6}$$

或

$$f(x_n)<-\delta \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{7}$$

我们只来讨论(6)式成立的情形；另一情形可同样证明．由慢递减性知：必有 $A=A(\delta)$ 及 $\eta=\eta(\delta)>0$，使当 $x\geqslant A$, $0\leqslant \Delta x\leqslant 2\eta$ 时，有

$$f(x+\Delta x)-f(x)\geqslant -\frac{\delta}{2}, \tag{8}$$

设 $n\geqslant n_0(\delta)$ 时必有 $x_n\geqslant A$．这样，若(6)式成立，则由(8)式可得

$$f(x_n+\Delta x)>\frac{\delta}{2},\ n\geqslant n_0(\delta),\ 0\leqslant \Delta x\leqslant 2\eta. \tag{9}$$

因而，当 $n\geqslant n_0(\delta)$ 时，必有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x_n+\eta-u)f(u)du\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{x_n}^{x_n+2\eta}+\int_{-\infty}^{x_n}+\int_{x_n+2\eta}^{\infty}\right\}\\
&\geqslant\frac{\lambda}{\pi}\left\{\frac{\delta}{2}\int_{x_n}^{x_n+2\eta}\left(\frac{\sin\lambda(x_n+\eta-u)}{\lambda(x_n+\eta-u)}\right)^2du\right.\\
&\quad-M\int_{-\infty}^{x_n}\left(\frac{\sin\lambda(x_n+\eta-u)}{\lambda(x_n+\eta-u)}\right)^2du\\
&\quad\left.-M\int_{x_n+2\eta}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda(x_n+\eta-u)}{\lambda(x_n+\eta-u)}\right)^2du\right\},\\
&=\frac{\lambda}{\pi}\left\{\frac{\delta}{2}I_1-MI_2-MI_3\right\}.
\end{aligned} \tag{10}$$

这里

$$|f(x)|\leqslant M,\ (-\infty<x<+\infty). \tag{11}$$

容易计算

$$I_1=\int_{-\eta}^{\eta}\left(\frac{\sin\lambda u}{\lambda u}\right)^2du=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda\eta}^{\lambda\eta}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du$$

$$I_2=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\eta}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du$$

$$I_3=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\eta}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du.$$

由以上三式及(10)式并利用(5)式可得：当 $n\geqslant n_0(\delta)$ 时，有

$$\text{(12)}\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x_n+\eta-u)f(u)du$$

$$\geqslant\frac{\delta}{2}-\frac{2M+\delta}{\pi}\int_{\lambda\eta}^{+\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du$$

$$>\frac{\delta}{2}-\frac{2M+\delta}{\pi\lambda\eta}.$$

因而当 $n\geqslant n_0(\delta)$，$\lambda\geqslant\dfrac{4(2M+\delta)}{\eta\delta\pi}$ 时，必有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x_n+\eta-u)f(u)\,du>\frac{\delta}{4},$$

而这与(2)式($a=0$)矛盾. ▌

附注 由证明容易看出，如果将定理 1 中的条件："对任意的 $\lambda>0$，有(2)式成立"，改为："对一串 $\lambda_n>0$，$\lambda_n\to+\infty$，有式(2)成立"，则定理仍然成立.

§4* Ikehara 定理

定理 1 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上的非负递增函数，$s=\sigma+it$，积分

$$\text{(1)}\qquad F(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx$$

当 $\sigma>1$ 时收敛. 再设存在一个常数 a 及函数 $g(t)$, 使在任意有限区间 $|t|\leqslant T$ 上一致有

$$\lim_{\sigma\to1_+}\left(F(s)+\frac{a}{s-1}\right)=g(t). \tag{2}$$

则有

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}f(x)=a. \tag{3}$$

附注 对任意的 $\sigma>1$, $F(s)-\dfrac{a}{s-1}$ 是 t 的连续函数, 所以 $g(t)$ 也是 t 的连续函数. 如在(2)式中取 $t=0$, 并令 $y=\sigma-1$, 则由(2)式可推出

$$\int_0^\infty e^{-yx}(e^{-x}f(x))\,dx\sim\frac{a}{y},\ y\to0_+. \tag{4}$$

这也就是说, 在定理 1 的条件下, 若(4)式成立, 则(3)式也成立.

下面先证明几个引理:

引理 1 设 $\lambda>0$,

$$k_\lambda(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{2\lambda}, & |x|\leqslant2\lambda;\\ 0, & |x|>2\lambda.\end{cases} \tag{5}$$

我们有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ixu}k_\lambda(u)\,du=\hat{k}_\lambda(x), \tag{6}$$

其中 $\hat{k}_\lambda(x)$ 由 § 3(4)式给出.

证 由定义知

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ixu}k_\lambda(u)\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2\lambda}^{2\lambda}e^{ixu}\left(1-\frac{|u|}{2\lambda}\right)du$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{2\lambda}\left(1-\frac{u}{2\lambda}\right)\cos(xu)\,du=\hat{k}_\lambda(x).\ \blacksquare$$

引理 2 设 $\varphi(u)\geqslant0$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 积分

(7) $$\int_0^\infty \varphi(u)e^{-\varepsilon u}du$$

存在，则有

(8) $$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_0^\infty \varphi(u)e^{-\varepsilon u}du=\int_0^\infty \varphi(u)du,$$

两端同时收敛或同时发散至 $+\infty$.

证 无论积分

$$\int_0^\infty \varphi(u)du$$

收敛或发散到 $+\infty$, 总有

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon u}\varphi(u)du\leqslant\int_0^\infty \varphi(u)du,$$

因而

(9) $$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0_+}}\int_0^\infty e^{-\varepsilon u}\varphi(u)du\leqslant\int_0^\infty \varphi(u)du.$$

另一方面，由于 $\varphi(u)=e^{\varepsilon u}(e^{-\varepsilon u}\varphi(u))$，所以 $\varphi(u)$在任一有限区间$[0, U]$上可积,并有

$$\int_0^U \varphi(u)du\leqslant e^{\varepsilon U}\int_0^U e^{-\varepsilon u}\varphi(u)du\leqslant e^{\varepsilon U}\int_0^\infty e^{-\varepsilon u}\varphi(u)du.$$

因而,对任意固定的 U,有

$$\int_0^U \varphi(u)du\leqslant \underline{\lim_{\varepsilon\to 0_+}}\int_0^\infty e^{-\varepsilon u}\varphi(u)du.$$

由于 U 是任意的,故得

$$\int_0^\infty \varphi(u)du\leqslant \underline{\lim_{\varepsilon\to 0_+}}\int_0^\infty e^{+\varepsilon u}\varphi(u)du,$$

由此及(9)式即得(8)式. ▌

现设

(10) $$a(x)=\begin{cases}a, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

再以

(11) $$f(x)=0,\ x<0,$$

的方式把 $f(x)$ 的定义域扩展到 $(-\infty, \infty)$. 我们来讨论积分：设 $\lambda>0$, $\varepsilon>0$,

(12) $$I_{\lambda,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)(e^{-u}f(u)-a(u))e^{-\varepsilon u}\,du,$$

其中 $\hat{k}_\lambda(x)$ 由 §3(4)式给出. 由于 $\hat{k}_\lambda(x)$ 有界

(13) $$0\leqslant\hat{k}_\lambda(x)\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda\quad(-\infty<x<+\infty).$$

故由条件(1)知积分(12)存在.

引理 3

(14) $$\lim_{\varepsilon\to0_+} I_{\lambda,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\lambda}^{2\lambda}\left(1-\frac{|y|}{2\lambda}\right)g(y)e^{ixy}\,dy.$$

证 由引理 1 知

$$I_{\lambda,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-u}f(u)-a(u))e^{-\varepsilon u}\,du \times\int_{-2\lambda}^{2\lambda}e^{i(x-u)y}\left(1-\frac{|y|}{2\lambda}\right)dy,$$

由于 $f(u)$ 是非负的且满足条件(1), 所以上式右端的积分号可以交换(读者自己验证), 从而得到:

$$I_{\lambda,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\lambda}^{2\lambda}e^{ixy}\left(1-\frac{|y|}{2\lambda}\right) \times\left\{F(1+\varepsilon+iy)-\frac{a}{\varepsilon+iy}\right\}dy.$$

令 $\varepsilon\to0_+$, 由此从条件(2)即得(14)式. ∎

引理 4

(15)

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} I_{\lambda,\varepsilon}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)\left(e^{-u}f(u)-a(u)\right)du.$$

证 因为

$$I_{\lambda,\varepsilon}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)e^{-u}f(u)e^{-\varepsilon u}du$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)a(u)e^{-\varepsilon u}du,$$

由条件(1)及(13)式知，右端两个积分均满足引理 2 的条件，后一积分当 $\varepsilon=0$ 时是存在的. 这样，将上式取极限即得(15)式，极限的存在性已由引理 3 证明. ▌

引理 5 设

(16) $$I_\lambda(x)=\lim_{\varepsilon\to 0_+} I_{\lambda,\varepsilon}(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)\left(e^{-u}f(u)-a(u)\right)du,$$

则对任意的 $\lambda>0$，有

(17) $$I_\lambda(x)\to 0,\ x\to\infty.$$

证 由于 $g(t)$ 是连续函数(见定理 1 附注)，故由(16)，(14)式，利用 Fourier 级数中熟知的 Riemann 定理(见【微】656 款)，即得(17)式. ▌

由 § 3 定理 1 及(17)式容易看出，为了证明定理 1，我们只要证明 $e^{-u}f(u)-a(u)$ 是有界慢递减函数即可. 显然，这相当于要证明 $e^{-u}f(u)$ 是有界慢递减函数.

引理 6 $e^{-x}f(x)$ 是有界慢递减函数.

证 先证慢递减性：对任意的 $\Delta x>0$，由 $f(x)$ 的递增性知，

$$e^{-(x+\Delta x)}f(x+\Delta x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}\{e^{-\Delta x}f(x+\Delta x)-f(x)\}$$
$$\geqslant e^{-x}f(x)(e^{-\Delta x}-1)\geqslant 0.$$

最后用到了 $f(x)$是非负的. 这就证明了慢递减性.

下面证有界性: 由(16), (17), (10)及§3(4)式得

$$\begin{aligned}(18)\qquad &\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)e^{-u}f(u)du\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)a(u)du\\ &=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)\,du\\ &=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}\hat{k}_\lambda(u)du\\ &=\frac{a}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{\lambda x}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du=a.\end{aligned}$$

最后一步参看§3(5)式. 显见, 当 $\lambda\geqslant 1$ 时, 上面的极限式是一致趋于 a 的. 因而必存在 x_0, 使当 $x\geqslant x_0$, $\lambda\geqslant 1$ 时, 有

$$(19)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)e^{-u}f(u)du<a+1.$$

由于上式中的被积函数是非负的, 利用§3(4)式, 作变量替换 $\lambda(x-u)=v$, 得

$$\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin^2 v}{v^2}e^{-\left(x-\frac{v}{\lambda}\right)}f\left(x-\frac{v}{\lambda}\right)dv<\pi(a+1)\ (x\geqslant x_0;\ \lambda\geqslant 1).$$

由此及 $f(x)$的递增性得: 当 $x\geqslant x_0$, $\lambda\geqslant 1$ 时,

$$f\left(x-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)e^{-(x+1/\sqrt{\lambda})}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv<\pi(a+1).$$

令 $\lambda\to+\infty$, 由此即得

$$(20)\qquad f(x_-)e^{-x}\leqslant a+1\quad (x\geqslant x_0).$$

再由 $f(x)$ 的递增性及 x 的任意性，由上式可得(证明留给读者)：

(21) $$f(x)e^{-x}\leqslant a+1 \quad (x\geqslant x_0).$$

这就证明了有界性. ▌

定理 1 的证明 由(16)、(17)式、引理 6 及 § 3 定理 1 就证明了本节定理 1. ▌

§ 5 素数定理的等价命题

有了前面的 Tauber 型定理，我们可以来证明素数定理与另外一些命题等价. 而这些命题有可能利用其它的方法较容易地被证明.

由 § 1 中定理 1 及定理 2 可证明

定理 1 素数定理

(1) $$\psi(x)\sim x \quad (x\to+\infty)$$

和命题

(2) $$\varphi_1(x)=\int_1^x \frac{\psi(u)}{u}du\sim x \quad (x\to+\infty)$$

及

(3) $$\psi_1(x)=\int_1^x \psi(u)\,du\sim\frac{1}{2}x^2 \quad (x\to+\infty)$$

均等价, 此外, 有

(4) $$\varphi_1(x)=\sum_{n<x}\Lambda(n)\ln\frac{x}{n},$$

(5) $$\psi_1(x)=\sum_{n<x}(x-n)\Lambda(n).$$

证明留给读者. (4)式和(5)式要利用 Abel 恒等式 (第

三章§1(2)式).

由§2定理1及其附注2可立即推出:

定理 2* 素数定理(即(1)式)和命题

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(n)x^n \sim \frac{1}{1-x} \quad (x\to 1_-) \tag{6}$$

等价.

要从§4定理1推出素数定理的等价命题并不是明显的,因为这里需要验证条件§4(1)和§4(2),这就需要用到ζ函数的性质. 现在仅写出下面结论,证明见第十章§1.

定理 3* 素数定理(即(1)式)和命题

$$\int_0^{\infty} e^{-yx}(e^{-x}\psi(e^x))dx \sim \frac{1}{y} \quad (y\to 0_+) \tag{7}$$

等价.

从素数定理成立推出(7)式成立是简单的,请读者自己证明. 而另一方面,如果验证了相应的条件§4(1)和§4(2)成立,则就立即推出了素数定理.

第九章习题

1. 设$f(u)$在任一有限区间$[0, x]$上可积,且存在积分

$$J(y)=\int_0^{\infty} f(u)e^{-yu}du \quad (y>0).$$

若当$u\to+\infty$时,$f(u)=o\left(\frac{1}{u}\right)$,且$\lim\limits_{y\to 0+} J(y)=s$,则$\int_0^{\infty} f(u)du=s$. [提示:考虑差

$$\int_0^{\frac{1}{y}} f(u)du-\int_0^{\infty} f(u)e^{-yu}du=\int_0^{\frac{1}{y}}(1-e^{-yu})f(u)du$$
$$-\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} f(u)e^{-yu}du,$$

分别估计最后的两个积分.]

2. 若 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\lim\limits_{x\to1-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=s$.

3. 试证明§2的附注2.

4. 设 $a_n\geqslant0$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\sim\frac{1}{(1-x)^2}$, $x\to1_-$. 证明 $\sum\limits_{n=0}^{N}a_n\sim\frac{N^2}{2}$, $N\to+\infty$. [提示: 讨论 $f_1(x)=\int_0^x f(u)du$, 应用§2定理1.]

5. 设$a_n\geqslant0$, $f(x)$同上题定义, 当 $x\to1_-$ 时, $f(x)\sim(1-x)^{\alpha}$, $\alpha>1$. 试证明$\sum\limits_{n=0}^{N}a_n\sim N^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)\quad(N\to+\infty)$. [提示: 讨论

$$f_{\alpha-1}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-2}f(t)dt.$$

证明当 $x\to1_-$ 时, $f_{\alpha-1}(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nn^{1-\alpha}x^n\sim(\Gamma(\alpha)(1-x))^{-1}$. 再利用§2定理1.]

6. 试证明§5定理1.

7. 试证明§5定理2.

8. Korevaar*) 证明了下面的 Tauber 型定理, 并由此给出了素数定理的一个简单证明. 设 $f(x)$为实值函数且满足条件: (a)当 $x\geqslant1$ 时, $xf(x)\ll1$; (b)在半平面 Re $s>0$ 内的解析函数

$$F(s)=\int_1^{\infty}f(x)x^{-s}ds$$

可解析开拓到Re $s\geqslant0$(即在直线 Re $s=0$ 的每一点上均解析). 则积分$\int_1^{\infty}f(x)dx$ 收敛, 且等于 $F(0)$. [提示: 对任意的 $y\geqslant1$, $F_y(s)=\int_1^y f(x)x^{-s}dx$是整函数, 问题变为证明 $\lim\limits_{y\to+\infty}F_y(0)=F(0)$. 按下述步骤来证明: (a)对每个 $R>0$, 必有 $h=h(R)>0$, 使 $F(s)$ 在区域 $|t|\leqslant R$, $\sigma\geqslant-h$ 上解析. (b)以 C 表示由直线 $\sigma=-h$ 和圆弧 $|s|=R$, $\sigma\geqslant-h$ 组成的正向围道, 则有

$$F_y(0)-F(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{s}(F_y(s)-F(s))y^s\left(1+\frac{s^2}{R^2}\right)ds.$$

---

*) 见 D. Zagier: 素数定理的一个简单证明, 《数学译林》第1卷(1982), 259～262.

(c)设 C_1 为半圆 $|s|=R,\ \sigma\geqslant 0$; C_2 为半圆 $|s|=R,\ \sigma\leqslant 0$; $C_3=C_{31}+C_{32}+C_{33}$, C_{31} 是圆弧 $|s|=R,\ t<0,\ 0\geqslant\sigma\geqslant -h$, C_{32} 是直线 $\sigma=-h,\ |s|\leqslant R$, C_{33} 是圆弧 $|s|=R,\ t>0,\ -h\leqslant\sigma\leqslant 0$. 试证明

$$F_y(0)-F(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(F_y(s)-F(s))y^s\ \frac{R^2+s^2}{R^2 s}ds$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}F_y(s)y^s\frac{R^2+s^2}{R^2 s}ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}F(s)y^s\frac{R^2+s^2}{R^2 s}ds$$

$$=I_1+I_2+I_3;$$

(d) 证明 $I_1\ll\frac{1}{R}$, $I_2\ll\frac{1}{R}$; (e)考虑 $I_3=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_{31}}+\int_{C_{32}}+\int_{C_{33}}\right)$, 试证明: 对固定的 R, 当 $h\to 0$ 时, $I_{31}\to 0$, $I_{33}\to 0$, 以及对固定的 R 与 h, 当 $y\to+\infty$ 时, $I_{32}\to 0$, 这里的积分围道都取正向].

9. 试证明积分 $\int_1^\infty\frac{\psi(x)-x}{x^2}dx$ 收敛, 且等于 $-\gamma-1$. [提示: 在上题中取 $f(x)=\frac{1}{x^2}(\psi(x)-x)$, 利用第八章中有关 $\zeta(s)$ 的性质验证上题条件满足]. 由此及第二章第 53 题就证明了素数定理.

第　十　章*

第四个证明

§1　第四个证明

先证明一个关系式：

定理 1

$$(1)\qquad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=s\int_1^\infty x^{-s-1}\psi(x)dx,\quad \sigma>1.$$

证　在第三章§1(2)式中取 $a(n)=\Lambda(n)$, $f(u)=u^{-s}$ 以及 $x>y=1$, 得到

$$\sum_{1<n\leqslant x}\Lambda(n)n^{-s}=\psi(x)x^{-s}+s\int_1^x\psi(u)u^{-s-1}du.$$

当 $\sigma>1$ 时，利用 $\psi(x)\ll x$ 及第八章§1(7)式，令$x\to+\infty$, 从上式即得(1)式. ∎

由(1)式容易推出：

$$(2)\qquad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{s}{s-1}=s\int_1^\infty x^{-s-1}(\psi(x)-x)dx,\quad \sigma>1.$$

利用(2)式可以证明：

定理 2　若素数定理 $\psi(x)\sim x$ 成立，则

$$(3)\qquad -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\sim\frac{1}{\sigma-1},\quad \sigma\to1_+.$$

证　由于素数定理成立，所以对任给的 $\varepsilon>0$, 必有 $x_0=x_0(\varepsilon)$, 使当 $x\geqslant x_0$ 时，有

$$|\psi(x)-x|\leqslant\varepsilon x.$$

由此及 $\psi(x)\ll x$，得

$$\int_1^\infty x^{-\sigma-1}(\psi(x)-x)dx \ll \int_1^{x_0} x^{-\sigma}dx + \varepsilon\int_{x_0}^\infty x^{-\sigma}dx$$

$$\ll \ln x_0 + \varepsilon\frac{x_0^{-\sigma+1}}{\sigma-1}, \quad \sigma>1.$$

对固定的 ε 和 x_0，由上式及(2)式($s=\sigma$)可得

$$\overline{\lim_{\sigma\to 1_+}}(\sigma-1)\left|-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}-\frac{\sigma}{\sigma-1}\right|\leqslant\varepsilon,$$

由于 ε 的任意性，由此推出

$$\lim_{\sigma\to 1_+}(\sigma-1)\left|-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}-\frac{\sigma}{\sigma-1}\right|=0,$$

这就证明了式(3). ▌

值得指出的是，上面证明的两个定理仅和 $\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma>1$ 上的原始定义有关，不需要 $\zeta(s)$ 的解析开拓和任何其它性质. 但另一方面，当把 $\zeta(s)$ 解析开拓到半平面 $\sigma>0$ (见第八章 § 2 定理 1)时，(3)式就是已经证明的第八章 § 2(10)式的显然推论.

从(3)式当然不能直接推出素数定理，而仅能得到

$$\int_1^\infty x^{-\sigma-1}\psi(x)\,dx \sim \frac{1}{\sigma-1}, \quad \sigma\to 1_+. \tag{4}$$

作变换 $x=e^u$，并令 $\sigma=1+y$，上式就变为

$$\int_0^\infty e^{-yu}(e^{-u}\psi(e^u))du \sim \frac{1}{y}, \quad y\to 0_+. \tag{5}$$

但是，对于特殊的函数 $\psi(x)$，我们能否从(4)式(或(5)式)推出素数定理(第九章 § 5 定理 3)呢？这就是第 9 章 § 4 定理 1 回答的问题，这时要取 $f(u)=\psi(e^u)$，而我们需要做的事情是验证相应的条件(第九章 § 4 中(1)及(2)式)是否满足. 而这仅需用到已经证明的 $\zeta(s)$ 的很少的性质——第八章中 § 2 定理 1 及 § 3 定理 1(即 $\zeta(1+it)\neq 0$). 这就是素数定理的第四

个证明.

素数定理的第四个证明 在第九章§4定理1中取$f(u)=\psi(e^u)$, $\psi(u)$显然是非负递增的. 当$\sigma>1$时,由式(1)得

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-su}\psi(e^u)\,du=\int_1^\infty x^{-s-1}\psi(x)\,dx=-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)},$$

因而条件(第九章§4(1)式)满足. 由第八章中§2定理1、§3定理1及第八章§2(10)式容易看出函数

$$F(s)-\frac{1}{s-1}=-\frac{1}{s}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right)-\frac{1}{s}$$

在半平面$\sigma\geqslant1$的每一点上都是解析的,因而条件:第九章§4(2)式($a=1$)亦成立. 这样,就得到

$$\lim_{u\to\infty}e^{-u}\psi(e^u)=1,$$

这就证明了素数定理. ▮

附注 当式(5)成立时,第九章§4(2)式所给出的条件中的常数a必等于1.

§2 素数定理成立的必要条件

定理1 若素数定理成立,则必有

(1) $$\zeta(1+it)\neq0,\quad -\infty<t<+\infty.$$

证 由§1(1)式及

(2) $$\int_1^\infty\frac{du}{u^s}=\frac{1}{s-1},\quad \sigma>1,$$

可得

(3) $$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{s}{s-1}=s\int_1^\infty\frac{\psi(u)-u}{u^{s+1}}\,du,\ \sigma>1.$$

假设$s_0=1+it_0$是$\zeta(s)$的m级零点,$m\geqslant1$. 因为$s=1$是$\zeta(s)$的极点,所以$t_0\neq0$. 显然有

$$(4)\qquad \lim_{\sigma\to 1_+}\frac{\zeta'(\sigma+it_0)}{\zeta(\sigma+it_0)}(\sigma-1)=m\geqslant 1.$$

在(3)式中取 $s=\sigma+it_0$, $\sigma>1$, 得

$$(5)\qquad \left|\frac{\zeta'(\sigma+it_0)}{\zeta(\sigma+it_0)}\right|(\sigma-1)\leqslant\left|\frac{\sigma+it_0}{(\sigma-1)+it_0}\right|(\sigma-1)$$

$$+|\sigma+it_0|(\sigma-1)\int_1^\infty\frac{|\psi(u)-u|}{u^{1+\sigma}}du.$$

设

$$(6)\qquad r(x)=\max_{u\geqslant x}\left|\frac{\psi(u)-u}{u}\right|,$$

$r(x)$是递减函数, 且若素数定理成立, 则有

$$(7)\qquad r(x)\to 0,\quad x\to+\infty.$$

对任意固定的正数 $A>1$, 由(5)式可得: 当 $\sigma>1$ 时, 有

(8)

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it_0)}{\zeta(\sigma+it_0)}\right|(\sigma-1)$$

$$\leqslant\left|\frac{\sigma+it_0}{(\sigma-1)+it_0}\right|(\sigma-1)+|\sigma+it_0|(\sigma-1)\int_1^A\frac{\psi(u)+u}{u^{1+\sigma}}du$$

$$+|\sigma+it_0|(s-1)r(A)\int_A^\infty\frac{du}{u^\sigma}.$$

$$\leqslant\frac{\sigma+|t_0|}{|t_0|}(\sigma-1)+(\sigma+|t_0|)(\sigma-1)\int_1^A\frac{\psi(u)+u}{u^{1+\sigma}}du$$

$$+(\sigma+|t_0|)r(A),$$

这里用到了 $t_0\neq 0$. 对固定的 A, 令 $\sigma\to 1_+$ 可得

$$(9)\qquad \overline{\lim_{\sigma\to 1_+}}\left|\frac{\zeta'(\sigma+it_0)}{\zeta(\sigma+it_0)}\right|(\sigma-1)\leqslant(1+|t_0|)r(A).$$

由于 A 的任意性, 令 $A\to+\infty$, 由(7)式可知当素数定理成立时, 上式左端的上极限为零, 这同(4)式矛盾. 这就证明了定理. ▌

式(1)实际上是在第八章§3定理1中已经证明的结论. 因此，任何一个不用第八章§3定理1而给出的素数定理的证明，也就是给出了第八章§3定理1的又一个证明.

由上一节给出的证明中可以看出，为了能应用 Tauber 型定理(第九章§4定理1)，在对条件进行的验证中，除了用到了 $\zeta(s)$ 的解析开拓外，关键的一点是 $\zeta(1+it)\neq 0$，即第八章§3定理1. 因此，我们可以说素数定理实质上等价于 $\zeta(1+it)\neq 0$.

第十章习题

1. 试证明第四个证明中的附注.

第十一章
第五个证明

虽然第四个证明只用到了 ζ 函数的很少(实质上可以说是最少)的性质，但是所应用的 Tauber 型定理(第九章 § 4 定理 1)却是很深刻的，证明是很困难的. 本章将用很弱的 Tauber 型定理——第九章 § 1 中的定理 1 与定理 2 来证明素数定理，但这需要用到 ζ 函数的更多的函数论性质. 为此，我们首先要建立 ζ 函数和 $\psi(x)$ 的某种加权和之间的关系式，但这里的关系式和第十章 § 1 中定理 1 所建立的关系式不同，是用 ζ 函数来表出 $\psi(x)$ 的某种加权和 (见第九章 § 5 定理 1). 此外，我们还要利用 Fourier 变换的基本性质来给出素数定理的余项估计.

§ 1 两个复变积分

为了得到所述的关系式，先要利用留数理论来计算两个复变积分.

引理 1 设 $a>0$, 整数 $k\geqslant 1$. 我们有

(1)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{y^s}{s^{k+1}}\,ds=\begin{cases}\dfrac{1}{k!}\ln^k y, & y\geqslant 1;\\ 0, & 0<y<1.\end{cases}$$

其中

(2) $$\int_{(a)}=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$$

是在直线 $\sigma=a$ 上的复变积分.

证 设 R 为充分大的正数, $C(R)$ 表示以原点为心, 半径为 R 的圆, 以 $C^+(R)$ 表示此圆在直线 $\sigma=a$ 左边的弧; $C^-(R)$ 表示右边的弧. 以 Γ_1 表直线 $\sigma=a$ 和 $C^+(R)$ 组成的正向围道; Γ_2 表直线 $\sigma=a$ 和 $C^-(R)$ 组成的正向围道.

先来证明 $y\geqslant 1$ 的情形. $s=0$ 是函数 $s^{-k-1}y^s$ 的唯一极点, 在围道 Γ_1 内. 由于

(3) $$y^s=e^{s\ln y}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n y}{n!}s^n,$$

所以留数为 $$\frac{1}{k!}\ln^k y.$$

因而, 由留数定理知

(4) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{y^s}{s^{k+1}}ds=\frac{1}{k!}\ln^k y.$$

此外, 还有

(5)
$$\left|\int_{C^+(R)}\frac{y^s}{s^{k+1}}ds\right|\leqslant 2\pi R y^a\frac{1}{R^{k+1}}=\frac{2\pi y^a}{R^k}\to 0\quad (R\to\infty).$$

由以上两式就证明了(1)式当 $y\geqslant 1$ 时成立.

当 $0<y<1$ 时, 由

(6) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{y^s}{s^{k+1}}ds=0$$

及

(7) $$\left|\int_{C^-(R)}\frac{y^s}{s^{k+1}}ds\right|\leqslant\frac{2\pi y^a}{R^k}\to 0\quad (R\to\infty)$$

亦推出(1)式成立. ▌

对 $k=0$, 可以证明: 设 $a>0$, 我们有

(8)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{y^s}{s}ds=\begin{cases}1, & y>1;\\ \frac{1}{2}, & y=1(\text{积分取主值});\\ 0, & 0<y<1.\end{cases}$$

它的证明较复杂一些，本书也不需要，可参看 Карацуба[1]第四章(2)式。

引理 2 设 $a>0$，整数 $k\geqslant 1$。我们有

(9)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds=\begin{cases}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{y}\right)^k, & y\geqslant 1,\\ 0, & 0<y<1.\end{cases}$$

证 证明和引理 1 相同。仍用引理 1 证明中的围道，并假定 $R>2k$，被积函数的极点为

$$0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ -k,$$

均在围道 Γ_1 内。由(3)式可得

$$y^s=\frac{1}{y^j}e^{(s+j)\ln y}=\frac{1}{y^j}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n y}{n!}(s+j)^n\right), y>0$$

所以在 $s=-j$ 处的留数为

$$\frac{(-1)^j}{k!}\binom{k}{j}\frac{1}{y^j}\quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k).$$

因而由留数定理得

(10)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{k!}\binom{k}{j}\frac{1}{y^j}$$
$$=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{y}\right)^k.$$

而当 $y\geqslant 1$，$R\geqslant 2k$ 时，

(11)

$$\left|\int_{C^+(R)} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds\right| \leqslant \frac{2\pi R y^a}{R(R-1)\cdots(R-k)}$$

$$\leqslant \frac{2^{k+2}\pi y^a}{R^k} \to 0, R \to \infty.$$

由此及(10)式就证明了当 $y \geqslant 1$ 时(9)式成立.

当 $0<y<1$ 时, 由

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds = 0 \tag{12}$$

及

$$\left|\int_{C^-(R)} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds\right| \leqslant \frac{2\pi y^a}{R^k} \to 0, \quad R \to \infty \tag{13}$$

即推得(9)式成立. ▌

§2 两个关系式

要把函数 $\psi(x)$本身用 ζ 函数来表出，需要利用积分§2 (8)式, 这就是熟知的 Perron 公式. 但是证明比较困难，这一公式的应用也较困难，这里就不讨论了(参看闵嗣鹤[1]第二篇第一章§4). 这一节里, 我们利用上节的引理1及引理2来得到 $\varphi_1(x)$ 和 $\psi_1(x)$ (见第九章§5(2)式和(3)式) 的表达式, 这种表达式易于用复变函数论的方法处理.

下面先证明一个关于交换求和号与积分号的引理.

引理1 设 $f_n(u)$是定义在整个数轴上的非负函数列, 且对任意实数 a、b, 有

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)\, du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(u) du. \tag{1}$$

则有

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)\,du=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)\,du,$$

即(2)式两边要么同时发散；要么同时收敛.

证 显然，只要证明(2)式有一端收敛，则另一端也收敛，且两边相等. 首先设右端的级数收敛，即

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)\,du=A.$$

由于 $f_n(u)\geqslant 0$，故对任意的 $a<b$，由(1)及(3)式得

$$(4)\qquad \int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)\,du=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(u)\,du$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)\,du=A.$$

因而(2)式左端的无穷积分收敛，设其值为 B：

$$(5)\qquad B=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)\,du\leqslant A.$$

但另一方面，对任意的正整数 N，有

$$(6)\qquad \sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n(u)\,du\leqslant B,$$

最后一步用到了 $f_n(u)\geqslant 0$. 令 $N\to\infty$，即得

$$(7)\qquad A\leqslant B.$$

这就证明了当(2)式右端收敛时，左端也收敛，且两值相等. 反过来，若设左端的积分收敛，其值为 B. 由(6)式就推出右端的级数收敛，设其值为 A，则有(7)式成立. 而由(4)式(令 $a\to-\infty, b\to+\infty$)就得(6)式，因此亦有 $A=B$. ▌

由引理 1 可得：

推论 1 设 $f_n(u)$ 是定义在整个数轴上的非负连续函数列，且对任意实数 $a<b$，级数

(8) $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)$$

在区间$[a, b]$上一致收敛，则必有(2)式成立.

推论 2 设$f_n(u)$是定义在整个数轴上的可取复值的连续函数，且对任意实数$a<b$，级数(8)在区间$[a, b]$上绝对一致收敛，则当

(9) $$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(u)|du<+\infty$$

或

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(u)|du<+\infty$$

成立时，必有(2)式成立，且两端均收敛.

证 我们只要讨论$f_n(u)$取实值的情形. 当$f_n(u)$取复值时，要分开实部和虚部来讨论. 当$f_n(u)$取实值时，显然有

(11) $$0\leqslant|f_n(u)|+f_n(u)\leqslant 2|f_n(u)|.$$

因此，函数列$|f_n(u)|+f_n(u)$满足推论 1 的条件，故有

(12) $$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(|f_n(u)|+f_n(u))\,du = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(|f_n(u)|+f_n(u))du.$$

由(11)式结合条件(9)或(10)，均可推出上式两端均收敛. 此外，对函数列$|f_n(u)|$应用推论 1 即得

(13) $$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(u)|\,du=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(u)|du.$$

由以上两式相减，即得所要的结果. ▌

这里证明的交换求和号与积分号的结果是十分有用的.

定理 1 设$a>1$, $x>2$. 我们有

(14) $$\varphi_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^2}\,ds.$$

这里 $\varphi_1(x)$是由第9章§5(2)式定义的函数.

证 在§1(1)式($k=1$)中令 $y=\dfrac{x}{n}$, 且在两端乘以 $\Lambda(n)$, 可得

(15) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{x^s}{s^2}\,ds=\begin{cases}\Lambda(n)\ln\dfrac{x}{n}, & n\leqslant x;\\ 0, & n>x.\end{cases}$$

由此及第九章§5(4)式就得到

(16) $$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(a)}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{x^s}{s^2}\,ds=\varphi_1(x).$$

上式左端积分等于

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{a+it}}\frac{x^{a+it}}{(a+it)^2}\,dt.$$

而当 $a>1$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\Lambda(n)}{n^{a+it}}\frac{x^{a+it}}{(a+it)^2}\right|dt\\ &=\frac{x^a}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{a^2+t^2}\\ &=\frac{x^a}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^a}.\end{aligned}$$

故由推论2知, 积分号与求和号可以交换, 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{a+it}}\frac{x^{a+it}}{(a+it)^2}\,dt\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{a+it}}{(a+it)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{a+it}}\,dt\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^2}\,ds,\end{aligned}$$

最后一步用到了第八章§1(17)式. 这就证明了(14)式. ▌

定理 2 设 $a>1$, $x>2$. 我们有

(17) $$\psi_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds,$$

其中 $\psi_1(x)$ 由第九章 § 5(3) 式给出.

证 在 § 1(9) 式 ($k=1$) 中令 $y=\frac{x}{n}$, 且在两端乘以 $x\Lambda(n)$, 可得

(18) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds=\begin{cases}(x-n)\Lambda(n), & n\leqslant x;\\ 0, & n>x.\end{cases}$$

由此及第九章 § 5(5) 式得

(19) $$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(a)}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds=\psi_1(x).$$

因 $a>1$, 故由推论 2 知, 上式左端的求和号与积分号可交换(同定理 1 中一样证明), 再利用第八章 § 1(17) 式就得到 (17) 式. ∎

§ 3 Fourier 变换

设 $f(x)$ 是定义在整个数轴上的实的绝对 Riemann 可积函数, 即

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<+\infty.$$

我们把函数

(2) $$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}f(u)du\quad(-\infty<x<\infty),$$

称为 $f(x)$ 的 Fourier 变换. 关于它的基本知识可参看【微】

或【数】，这里讨论的是复数形式的 Fourier 变换，应用起来是比较方便的. 本节将列出它的基本性质（在第十三章将进一步讨论 Lebesque 可积函数的 Fourier 变换）. 在第五个证明中仅需要下面的引理1和引理2；引理3和引理4将在第六个证明中用到.

引理 1 $\hat{f}(x)$是区间$(-\infty, +\infty)$上的连续函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\hat{f}(x)=\lim_{x\to-\infty}\hat{f}(x)=0. \tag{3}$$

证明见【微】，第691款，或【数】第四篇第六章§3，二和§11，二. 利用分部积分由引理1立即推出：

引理 2 设$f(x)$有n阶导数，$f^{(n)}(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，且

$$\lim_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=\lim_{x\to-\infty}f^{(k)}(x)=0 \quad (k=0,\cdots,n-1), \tag{4}$$

则有

$$\hat{f}(x)=o(|x|^{-n}) \quad (x\to\pm\infty). \tag{5}$$

证明留给读者.（也可参看【微】第691款）.

引理 3 对任意正数A，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(x)e^{-ivx}dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\{f(v+u)+f(v-u)\}\frac{\sin Au}{u}du.\end{aligned} \tag{6}$$

证 由(2)式知，上式左端等于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix(u-v)}f(u)du\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}dx\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos(x(u-v))du\end{aligned} \tag{7}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^A dx\int_{-\infty}^{\infty} f(v+u)\cos(xu)\,du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^A dx\int_0^{\infty}\{f(v+u)+f(v-u)\}\cos(xu)\,du.$$

由【微】第 472 款定理 IV* 或【数】第四篇第六章 § 11 的(5)式知，对任意 $B>0$ 可交换积分号，得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^A dx\int_0^B\{f(v+u)+f(v-u)\}\cos(xu)\,du \tag{8}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^B\{f(v+v)+f(v-u)\}\,du\int_0^A\cos(xu)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^B\{f(u+v)+f(v-u)\}\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

由条件(1)知，右端的积分当 $B\to+\infty$ 时存在，而在区间 $0\leqslant x\leqslant A$ 上，当 $B\to+\infty$ 时，

$$\int_0^B\{f(v+u)+f(v-u)\}\cos(xu)\,du$$

一致趋于 $\int_0^{\infty}\{f(u+v)+f(v-u)\}\cos(xu)\,du.$

因此对(8)式两端取极限，左端的极限号可移过积分号，这就证明了(6)式. ▌

引理 4 如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且在任一有限区间内是有界变差的*)，则有

(9)

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(x)e^{-ivx}dx=f(v)\quad(-\infty<v<+\infty),$$

进而，若 $\hat{f}(x)$ 也是在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积的，则

*) 有界变差函数的定义及性质见【实变】§5.2.

$$(10)\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)e^{-ivx}dx=f(v)\quad(-\infty<v<+\infty),$$

这就是著名的 Fourier 变换的反转公式.

这是 Dirichlet-Jordan 判别法的推论. 证明见【微】第 687 款的最后一段,或【数】第四篇第六章§11及§5.

现在,我们来举一个以后有用的 Fourier 变换的例子,它就是在第九章§3(4)式中引进的函数 $\hat{k}_\lambda(x)$和第九章§4(5)式中引进的函数 $k_\lambda(x)$. 设 $\lambda>0$. 定义

$$(11)\qquad k_\lambda(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{2\lambda}, & |x|\leqslant 2\lambda,\\ 0, & |x|>2\lambda.\end{cases}$$

显然,$k_\lambda(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的非负连续,有界变差,绝对可积的函数. 它的 Fourier 变换为

$$(12)\qquad \hat{k}_\lambda(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2\lambda}^{2\lambda}e^{ixu}\left(1-\frac{|u|}{2\lambda}\right)du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\lambda}\left(1-\frac{u}{2\lambda}\right)\cos(xu)\,du$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\lambda\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\right)^2.$$

显然,$\hat{k}_\lambda(x)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积,非负连续,以及在任一有限区间上有界变差. 故由引理 4 知

$$(13)\qquad k_\lambda(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ivx}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\lambda\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\right)^2\right)dx$$

$$(-\infty<v<+\infty).$$

此外,由直接计算积分可得

$$(14)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k_{\lambda}(x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\lambda$$

及

$$(15)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_{\lambda}(x)dx=\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sin\lambda x)^2}{x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2\lambda x)}{x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\lambda x)}{x}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=1,$$

最后一个积分已在第九章 § 3 的(5)式中出现过了.

§ 4 第五个证明

由第九章 § 1 的 Tauber 型定理 1 已经推出素数定理等价于 $\varphi_1(x)\sim x$(见第九章 § 5 定理 1). 第五个证明就是利用 § 2 中的 $\varphi_1(x)$的表达式(2)和 $\zeta(s)$的性质来证明这一点. 同样,由第九章 § 1 定理 2 证明了素数定理等价于 $\psi_1(x)\sim x^2/2$ (亦见第九章 § 5 定理 1), 用完全一样的方法, 可以利用 § 2 中的 $\psi_1(x)$的表达式(17)和 $\zeta(s)$的性质来证明这一点. 后一途径的详细论证留给读者(可参看 Apostol[1], 第十三章).

素数定理的第五个证明 类似于 § 2(14)式, 容易证明: 对 $a>1$ 有

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\zeta(s)\,\frac{x^s}{s^2}\,ds=\sum_{n\leqslant x}\ln\frac{x}{n}=x+O(\ln x),$$

最后一步用到了第二章 § 7(8)式. 由此及 § 2(14)式得

(2) $$\varphi_1(x)-x=\frac{-1}{2\pi i}\int_{(a)} h_1(s)\ \frac{x^s}{s^2}\,ds,\ a>1,\ x>2,$$

其中 $$h_1(s)=\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\zeta(s),$$

即第八章§4的(22)式中定义的函数．那里已经证明 $h_1(s)$ 在半平面 $\sigma\geqslant 1$ 的每一点上解析，且有第八章§4中的估计式(24)成立，因此，(2)式右边的积分当 $1\leqslant a\leqslant 2$ 时是绝对一致收敛的．所以由(2)式得到

(3) $$\begin{aligned}\varphi_1(x)-x&=\frac{-1}{2\pi i}\int_{(1)} h_1(s)\,\frac{x^s}{s^2}\,ds\\&=\frac{-x}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{it}\,\frac{h_1(1+it)}{(1+it)^2}\,dt\\&=\frac{-x}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\ln x}\,\frac{h_1(1+it)}{(1+it)^2}\,dt.\end{aligned}$$

如果我们仅利用第八章§4中 $k=0$ 时的估计式(24)，则由§3引理1和以上的(3)式，立即推出

(4) $$\varphi_1(x)=x+o(x)\quad(x\to+\infty).$$

由此及第九章§5定理1就证明了素数定理．▌

§5 余项估计

定理1 对任意正数 B，有

(1) $$\psi(x)=x+O(x(\ln x)^{-B}),$$

(2) $$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O(x(\ln x)^{-B-1}).$$

证 利用第八章§4的估计式(24)对任意非负整数 k 成立，由§4(3)式及§3引理2(取 $f(t)=h_1(1+it)\,(1+it)^{-2}$)立即推出：对任意正数 A 有

(3) $$\varphi_1(x)=x+O(x(\ln x)^{-A}),$$
其中 O 常数仅和 A 有关，因为这时容易证明对所取的 $f(t)$，当 $k=0, 1, 2, \cdots$时，有

$$f^{(k)}(t)=O((|t|+2)^{-2}(\ln(|t|+2))^{9(k+1)}).$$

设 $x^{-1}<\delta<0$，由第九章§5(2)式及以上的(3)式得

$$\varphi_1(x+\delta x)-\varphi_1(x)=\int_x^{x+\delta x}\frac{\psi(u)}{u}\,du\geqslant\frac{\delta}{1+\delta}\,\psi(x),$$

$$\varphi_1(x+\delta x)-\varphi_1(x)\leqslant\delta\psi(x+\delta x)\leqslant\delta\psi(x)+\delta^2x\ln x,$$

$$\varphi_1(x+\delta x)-\varphi_1(x)=\delta x+O(x(\ln x)^{-A}).$$

取 $A=2B+2$, $\delta=(\ln x)^{-B-1}$, x 充分大，这样由以上三式即得(1)式，因而(2)式也成立. ▌

这样，我们用初等函数论方法证明了和第三个证明所得到的同样的素数定理的余项估计.

第十一章习题

1. 用第五个证明方法来证明 $\psi_1(x)\sim\frac{1}{2}x^2$，由此推出素数定理. 进而得到同样的余项估计.
2. 设 $\varphi_1(x)=\int_1^x\frac{\psi(u)}{u}\,du$, $\varphi_k(x)=\int_1^x\frac{\varphi_{k-1}(u)}{u}\,du\ (k\geqslant2)$. 试证明: (a)对任意给定的整数 $k\geqslant1$，素数定理等价于 $\varphi_k(x)\sim x$; (b)对 $a>1$, $x>2$，有
$$\varphi_k(x)=\frac{1}{k!}\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\ln^k\frac{x}{n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^{k+1}}\,ds;$$
(c) 对任意的 $k\geqslant2$，有 $\varphi_k(x)\sim x$. 由此推出素数定理.
3. 设 $\psi_1(x)=\int_1^x\psi(u)du$, $\psi_k(x)=\int_1^x\psi_{k-1}(u)du$, $k\geqslant2$. 试证明: (a)对任意给定的整数 $k\geqslant1$，素数定理等价于 $\psi_k(x)\sim\frac{1}{k!}x^k$; (b)对 $a>$

1, $x>2$, 有

$$\psi_k(x)=\frac{1}{k!}\sum_{n<x}\Lambda(n)(x-n)^k$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds;$$

(c) 对任意的 $k\geqslant 2$, 有 $\psi_k(x)\sim\frac{1}{k!}x^k$. 由此推出素数定理.

第十二章
第六个证明

本章要利用 Mellin 变换及 Γ 函数的性质，给出一个用 ζ 函数来表示第九章 §5(6)式中的函数 $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(n)x^n$ 的表达式：然后，利用 $\zeta(s)$ 及 $\Gamma(s)$ 的性质证明第九章 §5 的(6) 式成立. 这样，由 Tauber 型定理——第九章 §2 定理 1(即第九章 §5 定理 2)就证明了素数定理. 需要指出的是：这一 Tauber 型定理的证明比第九章 §1 的定理 1 和定理 2 要困难，但比第九章 §4 的定理 1 要容易. 因而，相应地这里所用到的 ζ 函数的性质比第四个证明所用到的要强，而比第五个证明所用到的要弱.

§1 Mellin 变换

Mellin 变换是 Fourier 变换的一种特殊形式. 我们来证明以下形式的结果：

引理 1 设 $g(x)$是定义在$[0, +\infty)$上的实连续函数，在任一有限区间上有界变差. 若积分

$$G(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}g(x)\,dx \quad (s=\sigma+it) \tag{1}$$

当 $\sigma=\sigma_0$ 时绝对收敛，则当 $x>0$ 时，有

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{A\to+\infty}\int_{\sigma_0-iA}^{\sigma_0+iA} x^{-s}G(s)\,ds. \tag{2}$$

进而，若 $G(\sigma_0+it)$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的绝对可积函数，则

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma_0)} x^{-s}G(s)ds \quad (x>0). \tag{3}$$

证 作变换 $x=e^u$，式(1)$(\sigma=\sigma_0)$变为

$$G(\sigma_0+it)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}e^{u\sigma_0}g(e^u)du,$$

现在考虑函数 $f(u)=\sqrt{2\pi}\,e^{u\sigma_0}g(e^u)$，它满足第九章§4的引理3的条件，因而当 $-\infty<u<+\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}&\sqrt{2\pi}\,e^{u\sigma_0}g(e^u)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} e^{-iut}G(\sigma_0+it)dt,\end{aligned}$$

即

$$g(e^u)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{A\to+\infty}\int_{\sigma_0-iA}^{\sigma_0+iA} e^{-us}G(s)ds.$$

反过来，令 $e^u=x$，由此即得(2)式．而(3)式是(2)式在所说条件下的显然推论．】

特别的，若取 $g(x)=e^{-x}$，则 $G(s)$ 为

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx, \quad \sigma>0. \tag{4}$$

利用分部积分有

$$\Gamma(s)=\frac{1}{s(s+1)}\int_0^{\infty} x^{s+1}e^{-x}dx, \quad \sigma>0, \tag{5}$$

$$|\Gamma(s)|\leqslant\frac{\Gamma(\sigma+2)}{|s(s+1)|}, \quad \sigma>0. \tag{6}$$

所以，对任意固定的 $\sigma>0$，积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Gamma(\sigma+it)|dt<+\infty.$$

因而由引理1得

$$(7)\qquad e^{-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}x^{-s}\Gamma(s)ds,\ x>0,\quad \sigma>0.$$

下面还要用到 Γ 函数的下述性质：设 $\sigma_1\leqslant\sigma_2$ 是任给的两实数，当 $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ 时，一致地有

$$(8)\qquad \Gamma(\sigma+it)=O(e^{-\pi|t|/2}|t|^{\sigma-1/2}),\quad |t|\to\infty,$$

其中 O 常数和 σ_1, σ_2 有关．这一性质这里就不证明了．可参看【函】§ 4.42，例题(ii)，或[复]第六章 § 3(70)式(对两边取实部即得)．

§ 2 第六个证明

先来证明一个表达式：

定理 1 设 $a>1, x>0$，有

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\Gamma(s)x^s ds.$$

证 在 § 1(7)式中以 n/x 代 x，两边乘以 $\Lambda(n)$后求和，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(a)}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\Gamma(s)x^s ds.$$

由第十一章 § 2 推论 2 知，上式右边的求和号与积分号当 $a>1$ 时可以交换，由此及第八章 § 1(17)式即得(1)式．】

素数定理的第六个证明 在这一个证明中，我们只需用到 ζ 函数的如下两个性质：

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}$$

在半平面 $\sigma\geqslant1$ 的每一点上解析；存在一个常数 $c<\frac{\pi}{2}$，使得对 $\sigma\geqslant1$，一致地有

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=O(e^{c|t|}),\qquad |t|\geqslant2. \tag{2}$$

这个条件和第八章 § 4 中的估计式(31) 比较起来是十分弱的．但不足的是，估计式(2)还没有一个相应的简单证明．

由留数定理知：对 $a>1$，$x>0$ 有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\Gamma(s)x^s\,ds=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} \tag{3}$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{a-iT}^{1-iT}+\int_{1-iT}^{1-i\delta}+\int_{\gamma_\delta}+\int_{1+i\delta}^{1+iT}+\int_{1+iT}^{a+iT}\right\}+x,$$

其中 γ_δ 表示以 $s=1$ 为圆心、半径为 $\delta>0$(充分小)的在直线 $\sigma=1$ 左边的半圆．由 § 1 估计式(8)，及(2)式得

$$\int_{a-iT}^{1-iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\Gamma(s)x^{-s}\,ds\ll e^{\left(-\frac{\pi}{2}+c\right)T}\,T^{\,a-\frac{1}{2}}\to0,\ T\to\infty.$$

同样有

$$\int_{1+iT}^{a+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\Gamma(s)x^{-s}ds\to0,\qquad T\to\infty.$$

由于

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}$$

在 $s=1$ 解析，所以令 $s=1+\delta e^{i\theta}$，$\frac{\pi}{2}\leqslant\delta\leqslant\frac{3}{2}\pi$，

$$\int_{\gamma_\delta}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\Gamma(s)x^s\,ds=\int_{\gamma_\delta}\left(\frac{1}{s-1}+O(1)\right)\Gamma(s)x^s\,ds$$

$$\ll\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}x^{1+\delta\cos\theta}\,d\theta\ll x\int_0^{\pi}x^{-\delta\sin\theta}\,d\theta$$

$$=2x\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{-\delta\sin\theta}\,d\theta \ll x\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{-2\delta\theta/\pi}\,d\theta \ll \frac{x}{\delta\ln x}.$$

此外，由(2)式与§1估计式(8)知：以下两个积分绝对收敛：

$$\int_{1-i\infty}^{1-i\delta}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\Gamma(s)x^s\,ds,\qquad \int_{1+i\delta}^{1+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\Gamma(s)x^s\,ds.$$

综合以上讨论即得

$$\begin{aligned}(4)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\Gamma(s)x^s\,ds &= x+O\left(\frac{x}{\delta\ln x}\right)\\ &+\frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\left(-\frac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)}\right)\Gamma(1+it)x^{it}\,dt\\ &+\frac{x}{2\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\left(-\frac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)}\right)\Gamma(1+it)x^{it}\,dt\\ &=x+O\left(\frac{x}{\delta\ln x}\right)+\frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{it\ln x}dt,\end{aligned}$$

这里

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\delta<t<\delta,\\ \left(-\dfrac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)}\right)\Gamma(1+it), & \text{其它}.\end{cases}$$

由式(2)及§1估计式(8)知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty,$$

所以由第十一章§3引理1知

$$(5)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{it\ln x}dt\to 0,\qquad x\to+\infty.$$

由(1)，(4)及(5)式即推出

$$(6)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)e^{-n/x}\sim x,\ x\to+\infty.$$

令 $y=e^{-1/x}$，得到

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)y^n \sim \left(\ln \frac{1}{y}\right)^{-1} \sim (1-y)^{-1},\ y \to 1_-.$$

由此及第九章§5定理2就证明了素数定理. ▌

第十二章习题

按以下步骤证明素数定理:

1. 设$\sigma>1$, 证明 $\ln \zeta(s) = s\int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\,dx$.

2. 设 $\omega(s)=\int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x^{s+1}(x^s-1)}\,dx$. 证明它是半平面 $\sigma>\frac{1}{2}$ 内的解析函数, 且有

$$\omega'(s)=\int_2^\infty \frac{1-2x}{x^{s+1}(x^s-1)^2}\,\pi(x)\ln x\,dx.$$

3. 证明当 $\sigma>1$ 时, 有

$$-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s^2}\ln\zeta(s)+\omega'(s)=\int_2^\infty \frac{\pi(x)\ln x}{x^{s+1}}\,dx.$$

以 $\phi(s)$ 表示上式左边, 证明除去 $s=1$ 的一个邻域外, $\phi(s)$ 在半平面 $\sigma\geqslant 1$ 上有界. [提示: 利用第八章§4的(31)式($k=0$)及(32)式.]

4. 设 $g(x)=\int_0^x \frac{\pi(u)\ln u}{u}\,du$, $h(x)=\int_0^x \frac{g(u)}{u}\,du$.

证明当 $\sigma>1$ 时, 有

$$\frac{\phi(s)}{s^2}=\int_0^\infty h(x)x^{-s-1}\,dx.$$

进而利用§1引理1证明: 对 $c>1$, 有

$$h(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\phi(s)\frac{x^s}{s^2}\,ds.$$

5. 设 $\phi(s)=\frac{1}{s-1}+\psi(s)$. 证明在区域 $\sigma\geqslant 1$, $|s-1|\geqslant 1$ 上 $\psi(s)$有

界，而当 $\sigma\geqslant 1$, $s\to 1$ 时，$\psi(s)\ll\ln\dfrac{1}{\sigma-1}$. 由此推出

$$h(x)=x-\ln x-1+\frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(1+it)}{(1+it)^2}x^{it}\,dt.$$

6. 证明当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\sim x$. [提示：用第十一章§3引理1.]

7. 证明当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\sim x$, $\pi(x)\sim x(\ln x)^{-1}$.

第 十 三 章**

$\mathbb{L}$ 空间中的 Fourier 变换

为了证明 N. Wiener 的一般形式的 Tauber 型定理，需要先讨论 $\mathbb{L}$ 空间中的 Fourier 变换，这就是本章的内容. 本章及下一章中所说的实函数的可测和可积都是指 Lebesgue 意义的可测和可积. 为了讨论 $\mathbb{L}$ 空间中的 Fourier 变换需要用许多实变函数论的结果，为了方便起见，在用到时，我们将不加证明地列出其中一些重要的结果，其证明可在【实】，【实变】或【函】中找到.

§1 基 本 性 质

由所有 Lebesgue 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

存在的实函数 $f(x)$ 组成的函数空间称为 $\mathbb{L}$ 空间.

设 $f \in \mathbb{L}$，我们把函数

(1)
$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{ixu}\,du \quad (-\infty < x < +\infty),$$

称为函数 f 的 Fourier 变换. 由于 Lebesgue 可积一定是绝对可积的，所以这样的定义是有意义的. 此外，我们定义 $\hat{f}$ 的模

(2) $$\|\hat{f}\|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|du<+\infty.$$

定理 1 设 $f\in\mathbb{L}$，则 $\hat{f}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界的一致连续函数.

证 对 $-\infty<x<+\infty$，有

(3) $$|\hat{f}(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|du=\|\hat{f}\|,$$

由此就证明了有界性. 对任意的 $h\neq 0$，及 x，有

(4)
$$\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}e^{ixu}(e^{ihu}-1)f(u)du+\Delta(R),$$

(5)
$$|\Delta(R)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-R}|f(u)|du+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R}^{+\infty}|f(u)|du\to 0$$
$$(R\to+\infty).$$

取 $R=|h|^{-\frac{1}{2}}$，并利用不等式

(6) $$|e^{ihu}-1|\leqslant|hu|\leqslant|h|^{\frac{1}{2}}\quad(-R\leqslant u\leqslant R)$$

可得

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}e^{ixu}(e^{ihu}-1)f(u)\,du\right|\leqslant|h|^{\frac{1}{2}}\|\hat{f}\|,$$

由此及式(4)、(5)就证明了一致连续性. ▌

引理 1 设 $g(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的可测函数，且

$$|g(x)|\leqslant M,\ a\leqslant x\leqslant b.$$

则对任给的 $\delta>0$，一定存在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$，使得 $g(x)\neq\varphi(x)$ 的点集的测度 $\leqslant\delta$，且

$$|\varphi(x)|\leqslant M,\ a\leqslant x\leqslant b.$$

证明见【实】第四章 § 4 定理 4，或【实变】定理 3.18 及推

论 3.19.

引理 2 设 $f\in\mathbb{L}$，则

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(u+h)-f(u)|du=0.$$

证 设 k 是正整数，

$$f_k(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|\leqslant k,\\ 0, & |f(x)|>k.\end{cases}$$

由无界函数积分定义知

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)-f_k(u)|du=0.$$

我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u+h)-f(u)|du\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f_k(u+h)-f_k(u)|du$$
$$+2\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)-f_k(u)|du.$$

现设 $|h|<\frac{1}{2}$, $R>1$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_k(u+h)-f_k(u)|du\leqslant\int_{-R}^{R}|f_k(u+h)-f_k(u)|du$$
$$+2\int_{R/2}^{\infty}|f(u)|du+2\int_{-\infty}^{-R/2}|f(u)|du.$$

对固定的 k 和 R，由引理 1 知，对任意的 $\delta>0$ 必有闭区间 $[-2R, 2R]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$，使得 $f_k(x)\neq\varphi(x)$ 的点集的测度 $\leqslant\delta$，且 $|\varphi(x)|\leqslant k$. 因此

$$\int_{-R}^{R}|f_k(u+h)-f_k(u)|du\leqslant\int_{-R}^{R}|\varphi(u+h)-\varphi(u)|du$$
$$+\int_{-R}^{R}|f_k(u)-\varphi(u)|du+\int_{-R}^{R}|f_k(u+h)-\varphi(u+h)|du$$
$$\leqslant\int_{-R}^{R}|\varphi(u+h)-\varphi(u)|du+4k\delta.$$

对任给的 $\varepsilon>0$, 可取定 k_0 及 $R_0>1$, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)-f_{k_0}(u)|du<\varepsilon,$$

$$\int_{R/2}^{\infty}|f(u)|du<\varepsilon,\quad \int_{-\infty}^{-R/2}|f(u)|du<\varepsilon.$$

再取 $\delta=\varepsilon/k_0$, 综合以上各式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u+h)-f(u)|du$$

$$\leqslant\int_{-R_0}^{R_0}|\varphi(u+h)-\varphi(u)|du+10\varepsilon,$$

由于 φ 是闭区间 $[-2R_0,\ 2R_0]$ 上的连续函数, 因而

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(u+h)-f(u)|du\leqslant 10\,\varepsilon,$$

由于 ε 的任意性, 这就证明了引理. ▌

定理 2 设 $f\in\mathbb{L}$, 则

$$\lim_{|x|\to\infty}\hat{f}(x)=0.$$

证 设 $x\neq 0$, 我们有

$$-\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\left(u-\frac{\pi}{x}\right)}f(u)du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}f\left(u+\frac{\pi}{x}\right)du.$$

由此及式(1)得

$$2\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}\left\{f\left(u+\frac{\pi}{x}\right)-f(u)\right\}du,$$

$$2|\hat{f}(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(u+\frac{\pi}{x}\right)-f(u)\right|du.$$

由此及引理 2 即证得定理. ▌

最后, 顺便指出两个性质(读者自己证明). 对任意实数 a, $f\in\mathbb{L}$, 设 $F(x)=f(a+x)$, 则有

$$\hat{F}(x)=e^{-iax}\hat{f}(x), \tag{7}$$

即 $f(a+x)$（显然它 $\in\mathbb{L}$）的 Fourier 变换等于 $f(x)$ 的 Fourier 变换乘以 e^{-iax}.

设 $f_1\in\mathbb{L}$, $f_2\in\mathbb{L}$, $G=c_1f_1+c_2f_2$ （c_1, c_2 是实数），则有

$$\hat{G}=c_1\hat{f}_1+c_2\hat{f}_2, \tag{8}$$

即两个函数的线性组合的 Fourier 变换等于 Fourier 变换的线性组合.

§2 反 转 公 式

在一般情形下不一定有 $\hat{f}\in\mathbb{L}$. 本节将证明：如果 $\hat{f}\in\mathbb{L}$, 则就有反转公式成立，这就是下面的定理.

定理 1 设 $f\in\mathbb{L}$. 若 $\hat{f}\in\mathbb{L}$, 则等式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixu}\hat{f}(u)du \tag{1}$$

几乎处处成立.

为了证明这一定理，我们先要引进所谓积分的 Cesáro 求和的概念. 并证明一些引理.

设 $\phi(x)$ 在任意有限区间上可积. 若

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)\phi(x)dx=A, \tag{2}$$

则称积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx \tag{3}$$

是 Cesáro 可求和到 A. 要注意的是这里并不要求积分 (3) 存在*). 这是一种发散积分（或级数）的求和方法，这里的权函

---

*) 请读者自己举例说明：积分 (3) 可以不存在，但它是 Cesáro 可求和的.

数就是第九章§4(5)式引进的函数 $k_\lambda(x)$. (2)式可改写为(这里以 $2R$ 代 R)

$$(4)\qquad \lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k_R(x)\phi(x)dx=A.$$

引理1 设 $F\in\mathbb{L}$, $f_n\in\mathbb{L}$ $(n=1,2,\cdots)$, 并满足

$$|f_n(x)|\leqslant F(x),\qquad -\infty<x<+\infty.$$

那么, 若几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\qquad -\infty<x<+\infty,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx.$$

这就是熟知的 Lebesgue 控制收敛定理, 证明见【实】第六章§3定理1或【函】§10.8或【实变】定理4.14.

引理2 若 $\phi\in\mathbb{L}$, 则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k_R(x)\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx.$$

证 设 $R_1, R_2, \cdots$是任一趋于 $+\infty$ 的正数列. 定义

$$\phi_n(x)=k_{R_n}(x)\phi(x),\qquad -\infty<x<+\infty.$$

显然有 $|\phi_n(x)|\leqslant\phi(x)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\phi(x).$$

这样, 由引理1, 就证明了这引理. ▌

这引理表明: 若 $\phi\in\mathbb{L}$, 则积分(3)的 Cesáro 求和的值就等于这积分本身. 所以 Cesáro 求和是一种正规的(或相容的)求和法.

一般说来, 当 $f\in\mathbb{L}$ 时, $\hat{f}$ 不一定属于 $\mathbb{L}$, 所以(1)式右端积分不一定存在. 那么这一积分是不是 Cesáro 可求和的呢? 我们将证明几乎对所有的 x, (1) 式右端的积分是 Cesáro 可求和的, 且其值即为 $f(x)$.

为此，要引进 Lebesgue 点的定义．若

$$(5)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+u)-f(x)|\,du=0,$$

则称 x 为函数 f 的 Lebesgue 点．关于 Lebesgue 点有以下的结果：

引理 3 一个可积函数的不是 Lebesgue 点的集合的测度等于零．

证明见【实】第九章 § 4 定理 5，或【实变】§ 5.3*)．

我们还需要熟知的 Fubini 定理．

引理 4 设 $F(x, y)$ 是定义在全平面上的实函数，在任一有界矩形上可测，且累次积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}|F(x, y)|\,dy$$

存在，则二重积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x, y)\,dx\,dy$$

存在，作为 y 的函数

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}F(x, y)\,dx\in \mathbb{L},$$

以及有

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x, y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}F(x, y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}F(x, y)\,dx.$$

证明见【实】第十二章 § 3～§ 4，或【实变】定理 4.24, 4.26.

---

*) 该书第 185 页的最后一式的极限号后应乘因子 h^{-1}。

下面证明前面所讲的结果.

引理5 设 $f\in\mathbb{L}$,则对几乎所有的 x, (1)式右端的积分 Cesáro 可求和到 $f(x)$, 即等式

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}k_R(u)e^{-ixu}\hat{f}(u)du=f(x) \tag{8}$$

几乎对所有的 x 成立.

证 由引理3知,我们只要证明当 x 是 f 的 Lebesgue 点时必有(8)式成立,就证明了本引理.

以 $S_R(x)$ 记上式左端的积分. 由§1 (1)式及引理4知

$$\begin{aligned}S_R(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}k_R(u)e^{-ixu}\,du\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)e^{iuv}dv\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)dv\int_{-\infty}^{+\infty}k_R(u)e^{i(v-x)u}\,du\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{k}_R(v-x)f(v)dv\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{k}_R(v)f(v+x)dv.\end{aligned} \tag{9}$$

最后一步用到了第九章§4(6)式. 进而, 由第九章§3(5)式得

$$\begin{aligned}&S_R(x)-f(x)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{k}_R(v)\{f(v+x)-f(x)\}dv\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{-\eta}+\int_{-\eta}^{\eta}+\int_{\eta}^{\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{I_1+I_2+I_3+I_4+I_5\},\end{aligned} \tag{10}$$

这里取 $\delta=R^{-\frac{1}{3}}$, $\eta=R^{-1}$. 由于 x 是 Lebesgue 点, 及 $|\hat{k}_R(v)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}R$, 故由(5)式得

(11) $$|I_3|\leqslant\frac{R}{\pi}\int_{-1/R}^{1/R}|f(v+x)-f(x)|dv\to 0,\ R\to\infty.$$

对 I_5 有(注意: $\delta=R^{-1/3}$)

(12) $$\begin{aligned}|I_5|&\leqslant\frac{1}{\pi R}\int_\delta^{+\infty}|f(v+x)-f(x)|\ \frac{dv}{v^2}\\&\leqslant\frac{1}{\pi R\delta^2}\int_\delta^{+\infty}|f(v+x)|dv+\frac{|f(x)|}{\pi R}\int_\delta^{+\infty}\frac{dv}{v^2}\\&\leqslant\frac{\|f\|}{\pi R^{1/3}}+\frac{2|f(x)|}{\pi R^{2/3}}\to 0,\ R\to\infty.\end{aligned}$$

同样地, 有

(13) $$|I_1|\to 0,\quad R\to\infty,$$

现来估计 I_4. 设 $\phi(v)=|f(v+x)-f(x)|$, 由于 x 是 Lebesgue 点, 故有

(14) $$\Phi(y)=\int_0^y\phi(v)dv=o(y),\ y\to 0.$$

这样, 就有

(15)

$$|I_4|\leqslant\frac{1}{\pi R}\int_\eta^\delta\frac{\phi(v)}{v^2}\,dv=\frac{1}{\pi R}\left\{\frac{\Phi(v)}{v^2}\bigg|_\eta^\delta+\int_\eta^\delta\frac{\Phi(v)}{v^3}dv\right\}.$$

由 $\delta=R^{-1/3}$, $\eta=R^{-1}$ 以及(14)式得:

$$\frac{\Phi(\delta)}{\delta^2}=o\left(\frac{1}{\delta}\right)=o(R^{\frac{1}{3}}),\quad R\to\infty,$$

$$\frac{\Phi(\eta)}{\eta^2}=o\left(\frac{1}{\eta}\right)=o(R),\quad R\to\infty,$$

以及

$$\int_{\eta}^{\delta}\frac{\Phi(v)}{v^3}dv=o\left(\int_{\eta}^{\delta}\frac{dv}{v^2}\right)=o\left(\frac{1}{\eta}\right)=o(R),\quad R\to\infty.$$

因而有

$$|I_4|\to 0,\ R\to\infty. \tag{16}$$

同样地,有

$$|I_2|\to 0,\ R\to\infty. \tag{17}$$

综合估计式(11),(12),(13),(16)及(17),由(10)式得到

$$S_R(x)\to f(x),\ R\to\infty.$$

这就证明了本引理. ▌

定理 1 的证明 因为 $\hat{f}\in\mathbb{L}$, 故由引理 2 $\left(\text{取 } \phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ixu}\hat{f}(u)\right)$知

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixu}\hat{f}(u)du=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}k_R(u)e^{-ixu}\hat{f}(u)du.$$

由此及引理 5 就证明了定理 1. ▌

由定理 1 立刻可推出 $\mathbb{L}$ 空间中 Fourier 变换的唯一性.

定理 2 设 $f\in\mathbb{L}$, $g\in\mathbb{L}$. 若 $\hat{f}=\hat{g}$, 则 f 与 g 几乎处处相等.

证 因 $f-g\in\mathbb{L}$, 及由 §1 (8)式, 知

$$\widehat{f-g}=\hat{f}-\hat{g}=0\in\mathbb{L},$$

故而由定理 1 立即推出 $f-g$ 几乎处处等于零. ▌

§ 3 卷积及其 Fourier 变换

若 $f\in\mathbb{L}$, $g\in\mathbb{L}$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)g(y)|dx$$

$$<\int_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|dy\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty.$$

因而由§2引理4知

(1) $$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy\in\mathbb{L}.$$

我们把函数 $h(x)$ 称为 f 与 g 的卷积，记作

(2) $$h=f*g.$$

容易证明卷积具有以下性质：

(3) $$f*g=g*f;$$

(4) $$(cf)*g=c(f*g)\quad(c\text{ 实数});$$

(5) $$(f_1+f_2)*g=f_1*g+f_2*g;$$

(6) $$\widehat{f*g}=\hat{f}\cdot\hat{g};$$

(7) $$\|\widehat{f*g}\|\leqslant\|\hat{f}\|\cdot\|\hat{g}\|.$$

性质(3)，(4)，(5)是显然的．利用§2引理4立即可证明性质(6)和(7)：

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixu}du\int_{-\infty}^{\infty}f(u-y)g(y)dy\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixu}f(u-y)du\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}g(y)dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixv}f(v)dv\\&=\hat{f}(x)\hat{g}(x),\end{aligned}$$

这就证明了性质(6)．性质(7)的证明留给读者．

利用三维的 Fubini 定理还可证明卷积满足结合律：

(8) $$(f*g)*q=f*(g*q).$$

我们不需要这一性质，这里就不证明了．

性质(6)表明两个函数的卷积的 Fourier 变换等于这两个函数的 Fourier 变换的乘积．

§4 Fourier 变换空间 $\mathbb{F}$

函数空间 $\mathbb{F}$ 是由所有的 Fourier变换组成. 即函数$F\in\mathbb{F}$当且仅当存在 $f\in\mathbb{L}$ 使得 $F=\hat{f}$. 由 §1(7)和(8)式及 §3(6)式立即推出:

[i] 若 $F\in\mathbb{F}$, a 为实数, 则

$$e^{-iax}F(x)\in\mathbb{F};\tag{1}$$

[ii] 若 $F_1\in\mathbb{F}$, $F_2\in\mathbb{F}$, c_1、c_2 为实数, 则

$$c_1F_1+c_2F_2\in\mathbb{F};\tag{2}$$

[iii] 若 $F_1\in\mathbb{F}$, $F_2\in\mathbb{F}$, 则

$$F_1F_2\in\mathbb{F}.\tag{3}$$

下面讨论这样的问题: 若 $F_1\in\mathbb{F}$, $F_2\in\mathbb{F}$, 那么 F_1/F_2 是否一定属于 $\mathbb{F}$ 呢? 这里, 当然要求 F_2 取非零值. 但即使这样, 一般说来也是不成立的. 例如取 $F_1=F_2$, 由 §1 定理 2 知, 1 显然不属于 $\mathbb{F}$. 但我们可以证明下面的结论.

定理 1 设 $F\in\mathbb{F}$, $H\in\mathbb{F}$, F 不取零值, 且存在 $R>0$ 使

$$H(x)=0,\quad |x|>2R,$$

则 $H/F\in\mathbb{F}$.

为此, 先要证明两个引理.

引理 1 设 $f_n\in\mathbb{L}(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$, 如果对任给的 $\varepsilon>0$, 必有 $N_0=N_0(\varepsilon)$, 使对任意的 $N\geqslant N_0$ 及 $K\geqslant 1$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{n=N}^{N+K}f_n(u)\right|du<\varepsilon,$$

则必有唯一确定(除去一零测度的集合外)的 $f\in\mathbb{L}$, 使

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{n=0}^{N}f_n(u)-f(u)\right|du=0.$$

这就是平均收敛定理，证明见【函】§ 12.5 或【实变】定理 6.6.

引理 2 设 $F_1\in\mathbb{F}$, $F_2\in\mathbb{F}$, 且 $\|F_2\|<1$, 则

$$\frac{F_1}{1+F_2}\in\mathbb{F}, \tag{4}$$

且

$$\left\|\frac{F_1}{1+F_2}\right\|\leqslant\frac{\|F_1\|}{1-\|F_2\|}. \tag{5}$$

证 由§ 1(3)式知, $|F_2|\leqslant\|F_2\|<1$, 所以

$$\frac{F_1}{1+F_2}=\sum_{n=0}^{\infty}F_1(-F_2)^n. \tag{6}$$

由性质(2)、(3)及§ 3 (6)和(7)式知, $F_1(-F_2)^n\in\mathbb{F}$ 及

$$\|F_1(-F_2)^n\|\leqslant\|F_1\|\cdot\|F_2\|^n. \tag{7}$$

设 $f_n\in\mathbb{L}$, $\hat{f}_n=F_1(-F_2)^n$. 我们有

(8)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixu}\left(\sum_{n=N}^{N+K}f_n(u)\right)du=\sum_{n=N}^{N+K}F_1(-F_2)^n$$

及(利用(7)式)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{n=N}^{N+K}f_n(u)\right|du&\leqslant\sum_{n=N}^{N+K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(u)|du\\&=\sum_{n=N}^{N+K}\|F_1\|\cdot\|F_2\|^n.\end{aligned} \tag{9}$$

由于 $\|F_2\|<1$, 故由(9)式及引理 1 知存在 $f\in\mathbb{L}$, 使得

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixu}\left(\sum_{n=0}^{N}f_n(u)\right)du\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixu}f(u)du,\end{aligned}$$

由此及(8)式(取 $N=0$, $K=N$)与(6)式得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu} f(u)\,du=\frac{F_1}{1+F_2}.$$

这就证明了(4)式. 再由引理 1 及(7)式得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F_1}{1+F_2}\right\| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|\,du\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(u)\right|du\\ &\leqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\|\hat{f}_n\| \leqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\|F_1\|\cdot\|F_2\|^n\\ &= \frac{\|F_1\|}{1-\|F_2\|}.\end{aligned}$$

这就证明了(5)式. ▌

为了证明定理 1 还需用到我们曾多次用过的一对函数: 设 $\lambda>0$,

$$k_\lambda(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{2\lambda}, & |x|\leqslant 2\lambda,\\ 0, & |x|>2\lambda.\end{cases}\tag{10}$$

及

$$\hat{k}_\lambda(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\lambda\left(\frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\right)^2\tag{11}$$

(见第十一章 § 3 中(11)式及(12) 式). 注意到 $\hat{k}_\lambda(x)$是偶函数, 由第十一章 § 3 (13)式, 可得

$$\hat{\hat{k}}_\lambda=k_\lambda,\tag{12}$$

即 $\hat{k}_\lambda$ 的 Fourier 变换为 k_λ.

这里需要直接利用的是:

(13)

$$Q(x,\ \lambda)=2k_{\lambda}(x)-k_{\frac{\lambda}{2}}(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\lambda,\\ 2-\dfrac{|x|}{\lambda}, & \lambda<|x|\leqslant 2\lambda,\\ 0, & |x|>2\lambda,\end{cases}$$

这是一个梯形函数. 利用 Fourier 变换的性质, 显然有

(14)

$$\hat{Q}(x,\ \lambda)=2\hat{k}_{\lambda}(x)-\hat{k}_{\frac{\lambda}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda\left(\frac{\cos\lambda x-\cos 2\lambda x}{\lambda^2x^2}\right),$$

(15) $$\hat{\hat{Q}}(x,\ \lambda)=Q(x,\ \lambda)^{*)}.$$

此外, 由(13)式容易看出

(16)

$$\sum_{n=0}^{N}Q(x-(x_0+3n\varepsilon),\ \varepsilon)$$

$$=\begin{cases}1, & x_0-\varepsilon\leqslant x\leqslant x_0+3N\varepsilon+\varepsilon,\\ 0, & x\leqslant x_0-2\varepsilon \text{ 或 } x\geqslant x_0+3N\varepsilon+2\varepsilon.\end{cases}$$

定理 1 的证明 设 N 为充分大的自然数, 由后面来确定. 取 $\varepsilon=4R/3N$,

(17) $$x_n=-2R+3n\varepsilon\quad(n=0,\ 1,\ \cdots,\ N).$$

这样, 显然有 $x_0=-2R,\ x_N=2R$. 再设

(18) $$Q_n(x)=Q(x-x_n,\ \varepsilon)H(x).$$

由 $H(x)=0,\ |x|>2R$, 及(16)式知(注意: 这时有 $x_n=x_0+3n\varepsilon$)

(19) $$H(x)=\sum_{n=0}^{N}Q_n(x),$$

因而有

---

*) 注意 $\hat{Q}(x,\ \lambda)$ 为 x 的偶函数.

(20) $$\frac{H(x)}{F(x)}=\sum_{n=0}^{N}\frac{Q_n(x)}{F(x)}.$$

下面证明：只要 N 取得足够大，则对每一个 $n(0\leqslant n\leqslant N)$，必有 $Q_n/F\in\mathbb{F}$，这就证明了定理．我们将利用引理 2 来证明这一点．为此，注意到当 $|x-x_n|>2\varepsilon$ 时 $Q_n(x)=0$，而当 $|x-x_n|\leqslant 2\varepsilon$ 时，$Q(x-x_n,\ 2\varepsilon)=1$，所以总有

(21)

$$\frac{Q_n(x)}{F(x)}=\frac{Q_n(x)}{F(x_n)+(F(x)-F(x_n))Q(x-x_n,\ 2\varepsilon)}$$
$$=\frac{1}{F(x_n)}\frac{Q_n(x)}{1+G_n(x)},$$

其中

(22)

$$G_n(x)=\frac{1}{F(x_n)}(F(x)-F(x_n))Q(x-x_n,\ 2\varepsilon).$$

如果我们能够证明：只要 N 足够大，就必有

(23) $$\|G_n\|<1\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N),$$

则由引理 2 立即推出*)

(24) $$\frac{Q_n(x)}{1+G_n(x)}\in\mathbb{F},\quad\frac{Q_n(x)}{F(x)}\in\mathbb{F}.$$

下面证明(23)式：设

$$\hat{f}=F,\ \hat{q}(x)=Q(x,\ 2\varepsilon)\ 及\ \hat{q}_n(x)=Q(x-x_n,\ 2\varepsilon),$$

由(15)式知

(25) $$q(x)=\hat{Q}(x,\ 2\varepsilon),$$

进而由 Fourier 变换的定义知

(26) $$q_n(x)=e^{-ix_nx}q(x)=e^{-ix_nx}\hat{Q}(x,\ 2\varepsilon).$$

---

*) 由(15)式，§3(6)式及 §1 (8)式，容易推出 $Q_n\in\mathbb{F}$, $G_n\in\mathbb{F}$. 因此，引理 2 的条件满足．

这样，$F(x)Q(x-x_n,\ 2\varepsilon)$是$f*q_n$的 Fourier 变换，$F(x_n)Q(x-x_n,\ 2\varepsilon)$是$F(x_n)q_n$的 Fourier 变换，因此，由模的定义及(26)式可得

(27)

$$
\begin{aligned}
\|G_n\| &= \frac{1}{|F(x_n)|}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f*q_n-F(x_n)q_n|\,du \\
&= \frac{1}{|F(x_n)|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)q_n(u-v)\,dv\right. \\
&\quad \left. -q_n(u)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix_nv}f(v)\,dv\right|du \\
&= \frac{1}{|F(x_n)|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_n(u-v)}f(v)\hat{Q}(u-v,\ 2\varepsilon)\,dv\right. \\
&\quad \left. -e^{-ix_nu}\hat{Q}(u,\ 2\varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix_nv}f(v)\,dv\right|du \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi|F(x_n)|}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\,(\hat{Q}(u-v,2\varepsilon)\right. \\
&\quad \left. -\hat{Q}(u,\ 2\varepsilon))\,dv\right|du \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi|F(x_n)|}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(v)|\,dv\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{Q}(u-v,\ 2\varepsilon) \\
&\quad -\hat{Q}(u,\ 2\varepsilon)|\,du
\end{aligned}
$$

上式最后一步用到了§2引理4.

容易算得，对任意的λ，有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{Q}(u,\ \lambda)|\,du &\leqslant 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{k}_\lambda(u)\,du \\
&\quad +\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{k}_{\frac{\lambda}{2}}(u)\,du=3.
\end{aligned}
$$

最后一步用到了第十一章§3(15)式．所以，对任意正数A，有

$$(28)\qquad \|G_n\|\leqslant\frac{1}{2\pi|F(x_n)|}\int_{-A}^{A}|f(v)|dv \times\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{Q}(u-v,\ 2\varepsilon)-\hat{Q}(u,\ 2\varepsilon)|du +\frac{3}{\pi|F(x_n)|}\left\{\int_{-\infty}^{-A}|f(v)|dv +\int_{A}^{+\infty}|f(v)|dv\right\}.$$

此外，由(14)式得：当 $-A\leqslant v\leqslant A$ 时，一致有

$$(29)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{Q}(u-v,\ 2\varepsilon)-\hat{Q}(u,\ 2\varepsilon)|du =\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\cos(y-2\varepsilon v)-\cos 2(y-2\varepsilon v)}{(y-2\varepsilon v)^2} -\frac{\cos y-\cos 2y}{y^2}\right|dy\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

注意到 $F(x)$是连续函数且不取零值．这里

$$-2R\leqslant x_n\leqslant 2R.$$

所以

$$\min_{0\leqslant n\leqslant N}|F(x_n)|=c>0.$$

因而由式(28)与(29)立即推出：当 $\varepsilon\to 0$，即 $N\to\infty$ 时，必一致有

$$\|G_n\|\to 0\quad(0\leqslant n\leqslant N).$$

所以取 $N=N_0$ 足够大，必有

$$\|G_n\|<\frac{1}{2}\quad(0\leqslant n\leqslant N).$$

这就证明了(23)式．▌

第 十 四 章**

WIENER 定理与第七个证明

本章的目的是证明 N. Wiener 的一般形式的 Tauber 型定理(§1 定理 2), 并由此给出素数定理的第七个证明.

§1 Wiener 定理

首先证明下面的 Tauber 型定理:

定理 1 设 $g\in\mathbb{L}$, $\hat{g}$ 不取零值, 再设 $\phi(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界慢递减函数. 那么, 若

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u)\phi(u)\,du = a\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,du, \tag{1}$$

则

$$\lim_{x\to\infty}\phi(x) = a. \tag{2}$$

证 不妨假定 $a=0$, 若不然, 可用 $\phi(x)-a$ 代 $\phi(x)$. 由第十三章 §4 定理 1 知

$$\frac{k_\lambda(x)}{\hat{g}(x)}\in\mathbb{F},$$

其中 $k_\lambda(x)$ 是由第十三章 §4(10)式给出. 设

$$\hat{f}(x) = \frac{k_\lambda(x)}{\hat{g}(x)},$$

由第十三章 §3(6)式得

$$k_\lambda = \hat{f}\cdot\hat{g} = \widehat{f*g}.$$

由此及第十三章§4(12)式（并利用第十三章§2的唯一性定理2)得到

$$\hat{k}_\lambda = f*g$$

几乎处处成立，其中 $\hat{k}_\lambda$ 由第十三章§4(11)式给出.

因而，由第十三章§2引理4得(注意ϕ是有界的)：

(3)

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)\phi(u)du\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(u)du\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u-v)f(v)dv\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)dv\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u-v)\phi(u)du.\end{aligned}$$

又因ϕ有界，设$|\phi|\leqslant M$，则

(4)

$$\begin{aligned}&\left|f(v)\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u-v)\phi(u)du\right|\\&\leqslant M|f(v)|\int_{-\infty}^{+\infty}|g(u)|du\in\mathbb{L},\end{aligned}$$

且由条件(1)($a=0$)知，几乎对所有的 v，有

(5)

$$\lim_{x\to\infty}f(v)\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u-v)\phi(u)du=0,$$

所以，由第十三章§2引理1得

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{k}_\lambda(x-u)\phi(u)du=0. \tag{6}$$

由此及第九章§3的 Tauber 型定理1即得式(2)($a=0$).▌

有了定理1就很容易推出 Wiener 的一般形式的 Tauber 型定理：

定理2 设 $g\in\mathbb{L}$，$\hat{g}$ 不取零值，再设

$$|\phi(x)|\leqslant M \quad (-\infty<x<+\infty).$$

那么，若

(7) $$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u)\phi(u)du=a\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)du,$$

则对任意的 $f\in\mathbb{L}$，有

(8)

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-u)\phi(u)du=a\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du.$$

证 不妨假定 $a=0$，不然以 $\phi(x)-a$ 代替 $\phi(x)$ 即可. 设

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-u)\phi(u)du.$$

首先证明 $h(x)$ 是有界慢递减函数. 因为

$$|h(x)|\leqslant M\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du,$$

这就证明了有界性. 再由

$$|h(x+\Delta x)-h(x)|\leqslant M\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\Delta x-u)-f(x-u)|du$$

$$=M\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\Delta x+v)-f(v)|dv\to 0,\ \Delta x\to 0,$$

最后一步用到了第十三章§1引理1，这就证明了慢递减性.

另一方面，由第十三章§2引理4得(注意 ϕ 有界)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u)h(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u)du\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-v)\phi(v)dv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(v)dv\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-v-y)f(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)dy\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-y-v)\phi(v)dv.$$

重复定理1中(3)～(6)式的论证(注意那里的条件(1)($a=0$)由这里的条件(7)($a=0$)代替)，立刻得到

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u)h(u)du=0.$$

由于 $h(x)$是有界慢递减函数，由此及定理 1 即得

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=0.$$

这就证明了(8)式. ∎

附注 为什么定理 1 也是 Tauber 型定理，定理 2 称为一般形式的 Tauber 型定理，这里就不作解释了，参看 Widder [1] 第五章，潘承洞和于秀源 [1] 第九、十章.

§2 第七个证明

利用 Wiener 的一般形式的 Tauber 型定理，从 $\zeta(1+it)\neq 0$ 立即推出素数定理，而不需要用到 ζ 函数其他更进一步的性质.

我们将先证明 Ingham 的一个一般性定理:

定理 1 设 $f(x)$是定义在 $x\geqslant 1$ 上的非负递增函数，且存在两个常数 a、b，使得

(1)

$$\sum_{n<x}f\left(\frac{x}{n}\right)=ax\ln x+bx+o(x),\ x\to+\infty,$$

则

(2)
$$f(x)\sim ax,\qquad x\to+\infty.$$

由它显然可立刻推出素数定理.

素数定理的第七个证明 在定理 1 中取 $f(x)=\psi(x)$，由第二章 § 7(9)式知条件(1)满足，因而得 $\psi(x)\sim x$. ∎

定理 1 的证明 由式(1)可得

(3)

$$\int_1^x \frac{1}{y}\Big(\sum_{n\leqslant y} f\Big(\frac{y}{n}\Big)\Big)dy = ax\ln x + (b-a)x + o(x).$$

而另一方面，把上式左端两次交换求和号与积分号，得：

(4)

$$\int_1^x \frac{1}{y}\Big(\sum_{n\leqslant y} f\Big(\frac{y}{n}\Big)\Big)dy = \sum_{n\leqslant x}\int_n^x f\Big(\frac{y}{n}\Big)\frac{dy}{y}$$

$$= \sum_{n\leqslant x}\int_1^{\frac{x}{n}} f(u)\frac{du}{u}$$

$$= \int_1^x \frac{f(u)}{u}\Big(\sum_{n\leqslant x/u} 1\Big)du = \int_1^x \frac{f(u)}{u}\Big[\frac{x}{u}\Big]du.$$

由以上两式得到

(5)

$$\int_1^x \frac{f(u)}{u}\Big[\frac{x}{u}\Big]du = ax\ln x + (b-a)x + o(x).$$

现在要从(5)式出发来利用§1定理2. 为此令

(6) $$f(x)=0,\ 0\leqslant x<1,$$

并在(5)式中作变换 $x=e^{\xi}$, $u=e^{\eta}$, 得到当 $\xi\to+\infty$ 时有

(7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\eta)K_0(\xi-\eta)d\eta = a\xi + (b-a) + o(1),$$

其中

(8) $$\phi(\eta)=e^{-\eta}f(e^{\eta}),$$

(9) $$K_0(\eta)=e^{-\eta}[e^{\eta}].$$

首先我们来证明 $\phi(\eta)$ 是有界的. 由(5)式知

$$\int_1^{2x}\frac{f(u)}{u}\Big[\frac{2x}{u}\Big]du - 2\int_1^x \frac{f(u)}{u}\Big[\frac{x}{u}\Big]du = O(x).$$

而上式左端等于

$$\int_1^x \frac{f(u)}{u}\left(\left[\frac{2x}{u}\right]-2\left[\frac{x}{u}\right]\right)du$$
$$+\int_x^{2x}\frac{f(u)}{u}\,du\geqslant f(x)\ln 2.$$

这里用到了 $0\leqslant[2y]-2[y]\leqslant 1$ 及 $f(x)$是非负递增的. 由以上两式即得

(10) $$f(x)\ll x,$$

因而

(11) $$\phi(\eta)\ll 1.$$

但 $K_0(\eta)$不满足 §1 定理 2 关于 $g(\eta)$的条件. 为此,设 α、β 是两个实数,α/β 为无理数. 这样,由式(7)得到

(12) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\eta)K_1(\xi-\eta)d\eta=a(\alpha+\beta)+o(1),$$

其中

(13) $$K_1(\eta)=2K_0(\eta)-K_0(\eta-\alpha)-K_0(\eta-\beta).$$

由于

(14) $$K_0(\eta)=\begin{cases}e^{-\eta}(e^\eta+([e^\eta]-e^\eta))=1+O(e^{-\eta}), & \eta\geqslant 0,\\ 0, & \eta<0.\end{cases}$$

所以,总有

(15) $$K_1(\eta)=O(e^{-|\eta|})\quad(-\infty<\eta<+\infty).$$

因而

(16) $$K_1(\eta)\in\mathbb{L}.$$

由第八章§2 (4)式知,当 $\sigma>1$ 时,有

$$\zeta(s)=s\int_1^\infty\frac{[u]}{u^{1+s}}\,du=s\int_0^\infty[e^\eta]e^{-\eta s}d\eta.$$

因而当 $\sigma>0$ 时,有

(17) $$\int_{-\infty}^{\infty}K_0(\eta)e^{-\eta s}d\eta=\frac{\zeta(s+1)}{s+1}.$$

由此及式(13)得：当 $\sigma>0$ 时，有

$$(18)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\eta)e^{-\eta s}d\eta=(2-e^{-\alpha s}-e^{-\beta s})\frac{\zeta(s+1)}{s+1}.$$

由式(15)知，上式右端积分当 $\sigma\geqslant 0$*) 时绝对一致收敛，而右端由于 $\zeta(s+1)$ 在 $s=0$ 这一极点被 $(2-e^{-\alpha s}-e^{-\beta s})$ 在 $s=0$ 的零点抵消，所以右端在半平面 $\sigma\geqslant 0$ 每一点解析. 因而令 $s=-it$, 当 $-\infty<t<+\infty$ 时有

$$(19)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\eta)e^{it\eta}d\eta$$

$$=(2-e^{-i\alpha t}-e^{-i\beta t})\frac{\zeta(1-it)}{1-it}.$$

由于 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 的留数为 1, 以及 α/β 为无理数，故有

$$(20)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\eta)d\eta$$

$$=\lim_{t\to 0}(2-e^{-i\alpha t}-e^{-i\beta t})\frac{\zeta(1-it)}{1-it}=\alpha+\beta\neq 0$$

及
$$(2-e^{-i\alpha t}-e^{-i\beta t})\neq 0.$$

由以上三式及第八章 § 3 定理 1：$\zeta(1+it)\neq 0$, 即得

$$(21)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\eta)e^{it\eta}d\eta\neq 0,\ -\infty<t<+\infty.$$

由式(16)及(21)知 $K_1(\eta)$ 满足 § 1 定理 2 关于 $g(\eta)$ 的条件. 且由式(12)及(20)得

$$(22)\qquad \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\eta)K_1(\xi-\eta)d\eta=a\int_{-\infty}^{+\infty}K_1(\eta)d\eta.$$

现设 δ 为一正数，取

---

*) 实际上是 $\sigma>-1$，但我们不需要.

$$K(\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\delta}, & |\eta|\leqslant\delta,\\ 0, & |\eta|>\delta.\end{cases}$$

由§1定理2得

$$\begin{aligned}&\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\eta)K(\xi-\eta)d\eta\\ &\quad=\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{2\delta}\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\phi(\eta)d\eta\\ &\quad=\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{2\delta}\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}e^{-\eta}f(e^{\eta})d\eta=a,\end{aligned}$$

最后一步用到了(8)式. 由 $f(x)$ 的递增性知

$$e^{-(\xi+\delta)}f(e^{\xi-\delta})\leqslant\frac{1}{2\delta}\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}e^{-\eta}f(e^{\eta})d\eta\leqslant e^{-(\xi-\delta)}f(e^{\xi+\delta}),$$

对固定的 $\delta>0$, 由以上两式得

$$\overline{\lim_{\xi\to\infty}}\frac{f(e^{\xi})}{e^{\xi}}=\overline{\lim_{\xi\to\infty}}\frac{f(e^{\xi-\delta})}{e^{\xi-\delta}}\leqslant e^{2\delta}a,$$

$$\underline{\lim_{\xi\to\infty}}\frac{f(e^{\xi})}{e^{\xi}}=\underline{\lim_{\xi\to\infty}}\frac{f(e^{\xi+\delta})}{e^{\xi+\delta}}\geqslant e^{-2\delta}a.$$

由于 δ 的任意性, 从以上两式就证明了(2)式. ▌

最后, 我们把定理1和第三章§2定理4来作一比较. 若在定理1中取 $f(x)$ 为某一非负算术函数 $a(n)$ 的和函数, 则易知条件(1)变为

$$\sum_{n<x}a(n)\left[\frac{x}{n}\right]=ax\ln x+bx+o(x),\quad x\to\infty.$$

从它就可推出(2)式. 而从第三章§2条件(11)仅能得到不等式

$$f(x)=O(x).$$

第十四章习题

1. 证明在§2定理1的条件下有$\int_1^{\infty}\frac{f(x)-ax}{x^2}dx=b-a\gamma$. 特别地，有$\int_1^{\infty}\frac{\psi(x)-x}{x^2}dx=-1-\gamma$. [提示：由§2(5)式可得

$$\frac{1}{x}\int_1^x\frac{f(y)-ay}{y}\left[\frac{x}{y}\right]dy=b-a\gamma+o(1), x\to+\infty].$$

2. 设 K 为一正数，$a_n>-\frac{K}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$. 再设 $\sum_{n\leqslant x}na_n\left[\frac{x}{n}\right]\to Ax$ $(x\to+\infty)$. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$. [提示：设 $b_n=na_n+K$, $B(x)=\sum_{n\leqslant x}b_n$. 利用第四章§1引理2证明 $\sum_{n\leqslant x}B\left(\frac{x}{n}\right)=Kx\ln x+(A+(2\gamma-1)K)x+o(x)$. 由此再利用§2定理1及上题.]

第 十 五 章*

素数定理的一个推广

1982年，P. Erdös 和 J. H. vanLint([1]) 证明了一个很有趣的结果:

定理 1 设整数 $n>1$，$P(n)$表示n的最大素因子，$p(n)$表示n的最小素因子. 再设

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{p(n)}{P(n)}. \tag{1}$$

我们有

$$S(x)=(1+o(1))\pi(x), \tag{2}$$

及

$$S(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{3x}{\ln^2 x}+o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \tag{3}$$

显然，当n仅取素数时

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{p(p)}{P(p)}=\sum_{p\leqslant x}1=\pi(x),$$

所以$S(x)$是$\pi(x)$的一种推广. 而(2)式表明$S(x)$和$\pi(x)$是相抵的，(3)式进一步求出了$S(x)$的渐近公式. 注意到对任意正数A有

(4)

$$\pi(x)=\mathrm{Li}x+O(x(\ln x)^{-A})$$

$$=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$$

(见第九章§4(6)式，第三章§1定理2及第三章§1(24)式)，

可看出 $S(x)$ 的进一步的渐近公式和 $\pi(x)$ 是不同的[*)].

本章的目的是证明渐近公式(3)，并指出可能证明一些进一步的结果. 以下总假定 $n>1$ 及 x 表示充分大的正数. 先证明一个引理:

引理 1 设

$$\psi(x,\ y)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant y}}1, \tag{5}$$

则对任给的正数 A，一定存在正数 B，使当

$$y=\exp\left(\frac{B\ln x}{\ln\ln x}\right) \tag{6}$$

时，有

$$\psi(x,\ y)\ll x\ln^{-A}x. \tag{7}$$

证 不妨设 $A>6e$. 取

$$\varepsilon=(2A\ln\ln x)/\ln x. \tag{8}$$

当 x 充分大时，$0<\varepsilon<1$. 我们有

$$\psi(x,\ y)\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant y}}\left(\frac{x}{n}\right)^{1-\varepsilon}\leqslant x^{1-\varepsilon}\prod_{p\leqslant y}(1-p^{-1+\varepsilon})^{-1}, \tag{9}$$

两端取对数，得

$$\ln\psi(x,\ y)\leqslant\ln x-\varepsilon\ln x-\sum_{p\leqslant y}\ln(1-p^{-1+\varepsilon}). \tag{10}$$

当 x 充分大时，有

$$-\sum_{p\leqslant y}\ln(1-p^{-1+\varepsilon})=\sum_{p\leqslant y}\int_{-p^{-1+\varepsilon}}^{0}\frac{du}{1+u} \tag{11}$$

$$<3\sum_{p\leqslant y}p^{-1+\varepsilon}\leqslant 3e^{2BA}\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p},$$

---

*) (3)式中的误差项亦可改为 $O(x\ln^{-3}x)$。

最后一步用到了(6)式和(8)式. 由式(8), (10), (11)及第三章§2定理2知, 当x充分大(y亦充分大)时, 有

(12) $$\ln\psi(x, y)\leqslant\ln x-2A\ln\ln x+6e^{2BA}\ln\ln y,$$

现在取 $B=1/2A$, 注意到 $y\leqslant x$, $A>6e$, 由上式即得

(13) $$\ln\psi(x, y)\leqslant\ln x-A\ln\ln x,$$

这就证明了(7)式. ▌

式(3)的证明 现取 $A>6e$, $B=1/2A$, y 由(6)式给出. 由引理1知

(14) $$S(x)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ y<P(n)}}\frac{p(n)}{P(n)}+O\left(\frac{x}{\ln^A x}\right).$$

进而易得

(15) $$S(x)=\sum{}'\frac{p(n)}{P(n)}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right),$$

其中 $\sum'$ 表对满足以下条件的 n 求和:

(16) $$1<n\leqslant x,\ y<P(n)<p(n)(\ln^3 x).$$

以下 n 总表示满足这个条件的整数.

设 $\omega(n)$ 表示 n 的不同的素因子的个数. $\sum'_k$ 表示对满足以下条件的 n 求和: 满足条件(16), 及

(17) $$\mu(n)\neq0,\ \omega(n)=k.$$

此外, 以 $\sum''$ 表对满足条件(16)及 $\mu(n)=0$ (即 n 有大于1的平方因子)的 n 求和. 这样, 我们有

(18)
$$S(x)=\sum{}''\frac{p(n)}{P(n)}+\sum{}'_1\frac{p(n)}{P(n)}+\sum{}'_2\frac{p(n)}{P(n)}+\sum{}'_3\frac{p(n)}{P(n)}+\sum{}'_4\frac{p(n)}{P(n)}+\cdots+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right).$$

下面分别计算上式中的各项.

由条件(16)可知, $\sum''$ 中的 n 必有平方因子 m^2, 并且

$m>y(\ln x)^{-3}$, 所以

(19)

$$\sum{}'' \frac{p(n)}{P(n)} \leqslant \sum_{m>y(\ln x)^{-3}} \frac{x}{m^2} \ll \frac{x\ln^3 x}{y} \ll \frac{x}{\ln^3 x}.$$

由(4)式得

(20)

$$\sum{}_1' \frac{p(n)}{P(n)} = \sum_{y<p\leqslant x} 1 = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right).$$

现在计算 $\sum_2'$. 以 p, q 均表素变数, 有

(21)

$$\sum{}_2' \frac{p(n)}{P(n)} = \sum_{\substack{y<p,\, pq\leqslant x\\ q<p<q(\ln x)^3}} \frac{q}{p} = \sum_{y<p\leqslant x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{p} \sum_{p(\ln x)^{-3}<q\leqslant \min(p, \frac{x}{p})} q$$

$$= \sum_{y<p\leqslant x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p} \sum_{p(\ln x)^{-3}<q<p} q + \sum_{x^{\frac{1}{2}}<p\leqslant x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{p} \sum_{p(\ln x)^{-3}<q\leqslant \frac{x}{p}} q.$$

利用素数定理 $\pi(x)\sim x/\ln x$ 及第三章§1引理2易得:

(22) $$\sum_{q<w} q = \frac{1}{2}(1+o(1))\frac{w^2}{\ln w}.$$

由以上两式得到

(23) $$\sum{}_2' \frac{p(n)}{P(n)} = \frac{1}{2}(1+o(1)) \sum_{y<p\leqslant x^{\frac{1}{2}}} \frac{p}{\ln p}$$

$$+ (1+o(1))\frac{x^2}{\ln x} \sum_{x^{\frac{1}{2}}<p<x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{p^3}$$

$$= (1+o(1))\frac{2x}{\ln^2 x},$$

最后一步用到了

(24) $$\sum_{p<w} \frac{p}{\ln p} = \frac{1}{2}(1+o(1))\frac{w^2}{\ln^2 w},$$

及

$$(25)\qquad \sum_{p>w}\frac{1}{p^3}=\frac{1}{2}(1+o(1))\frac{1}{w^2\ln w},$$

这两个公式同样可由素数定理 $\pi(x)\sim x/\ln x$ 及第三章 § 1 引理 2 推出。

下面估计 Σ_3'：设 $p,\ q,\ r$ 均表素变数，$n=pqr,\ q<r<p$。这样就有

(26)

$$\begin{aligned}\Sigma_3'\frac{p(n)}{P(n)}&=\sum_{y<p<x^{\frac{1}{3}}(\ln x)^2}\frac{1}{p}\sum_{p(\ln x)^{-3}<q\leqslant\min\left(p',\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}q\sum_{q<r<p}1\\&\leqslant\sum_{y<p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{\pi(p)}{p}\sum_{p(\ln x)^{-3}<q<p}q\\&\quad+\sum_{x^{\frac{1}{3}}<p\leqslant x^{\frac{1}{3}}(\ln x)^3}\frac{\pi(p)}{p}\sum_{p(\ln x)^{-3}<q<\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}}}q\\&\ll\sum_{y<p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{p^2}{\ln^2 p}+\frac{x}{\ln x}\sum_{x^{\frac{1}{3}}<p\leqslant x^{\frac{1}{3}}(\ln x)^3}\frac{1}{p\ln p}\\&\ll\frac{x}{\ln^3 x}+\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{x^{\frac{1}{3}}<p\leqslant x^{\frac{1}{3}}(\ln x)^3}\frac{1}{p}\ll\frac{x\ln\ln x}{\ln^3 x}.\end{aligned}$$

最后一步用到了第三章 § 2 中定理 2.

最后，我们来估计余下的各项. 设

$$(27)\qquad \Sigma'''\frac{p(n)}{P(n)}=\Sigma_4'\frac{p(n)}{P(n)}+\Sigma_5'\frac{p(n)}{P(n)}+\cdots,$$

Σ''' 中的变数 $n=pqt,\ P(n)=p,\ p(n)=q,\ t$ 至少有两个素因子，这样就有

$$(28)\qquad \Sigma'''\frac{p(n)}{P(n)}=\Sigma'''\frac{q^2t}{n}\leqslant x\Sigma'''\frac{1}{n}.$$

由于这里的 $n=pqt,\ pt$ 的素因子 r 均大于 q 小于 $q(\ln x)^3$,

且 pt 的素因子各不相同，因而

$$(29)\qquad \sum{}'''\frac{1}{n}\leqslant\sum_{q\leqslant x}\frac{1}{q}\left\{\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j!}\Big(\sum_{q<r<q\ln^3 x}\frac{1}{r}\Big)^j\right\}.$$

由于 $q>y(\ln x)^{-3}$，从第三章§2定理2可得

$$(30)\qquad \sum_{q<r<q\ln^3 x}\frac{1}{r}\ll\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x},$$

因而由以上两式及第三章§2定理2推出

$$(31)\qquad \sum{}'''\frac{1}{n}\ll\frac{(\ln\ln x)^6}{(\ln x)^3}\sum_{q\leqslant x}\frac{1}{q}\ll\frac{(\ln\ln x)^7}{(\ln x)^3}.$$

由此即得

$$(32)\qquad \sum{}'''\frac{p(n)}{P(n)}\ll\frac{x(\ln\ln x)^7}{(\ln x)^3}.$$

综合式(18)，(19)，(20)，(23)，(26)，(27)及(32)，就证明了(3)式.】

贾朝华([1])证明了：

$$(33)\qquad S(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{3x}{\ln^2 x}+\frac{15x}{\ln^3 x}+o\Big(\frac{x}{\ln^3 x}\Big),$$

用他的方法原则上可以继续定出这渐近公式中的更低次项，当然计算是很复杂的. 一个没有解决的问题是：是否存在一个函数 $f(x)$(如同 $\pi(x)$的渐近公式(4)中的 $\mathrm{Li}\,x$ 一样)，使对任意的 $A>0$，有

$$(34)\qquad S(x)=f(x)+O(x\ln^{-A}x).$$

这是一个有意义的结果. 如果这样的 $f(x)$存在，那末(34)式中的误差项能否象素数定理中的一样，改进为

$$O(x\exp(-c\ln^{\lambda}x)),$$

c 为某一常数；$0<\lambda\leqslant1$. 看来，这些问题的回答应该是肯定的.

有趣的是蔡天新([1])讨论了和式

$$(35)\qquad Q(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{P(n)}{p(n)}.$$

他证明了：对任意的自然数 N，有

$$(36)\qquad Q(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{x^2}{(\ln x)^n}+O\left(\frac{x^2}{(\ln x)^{N+1}}\right),\ x\geqslant 2,$$

其中 a_n 由确定的公式给出，并由此推出了许多有趣的结果.

关于这方面的工作很多，由于篇幅有限，我们将就此结束本书，不再作进一步的讨论了。

参 考 资 料

S. A. Amitsur:

[1] *Canad. J. Math.*, **13**(1961), 83～109.

T. M. Apostol:

[1] *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976.

R. Ayoub:

[1] *An Introduction to the Analytic Theory of Numbers*, *Amer. Math. Soc.*, 1963.

A. Balog:

[1] *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **37**, (1981), 285～299.

S. Bochner:

[1] *Math. Zeit.*, **37**(1933), 1～9.

E. Bombieri:

[1] *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, **96**(1962), 343～350.

[2] *Riv. Mat. Univ. Parma* (2), **3**(1962), 393～440.

R. Breusch:

[1] *Duke Math. J.*, **21**(1954), 49～53.

[2] *Pacific J., Math.*, **10**(1960), 487～497.

蔡天新:

[1] «一类数论函数的均值估计»,科学通报,**29**(1984), 1481～1484.

P. J. Čižek:

[1] *Čas. Pěst. Mat.*, **106**(1981), 395～401.

J. G. van der Corput

[1] *Coll. sur la Théorie des Nombres*, *Bruxelles*, 1955, 163～182, Georges Thone, Liège; Masson and Cie, Paris, 1956.

H. G. Diamond, J. Steinig:

[1] *Invent. Math.*, **11** (1970), 199～258.

A. Дусумбетов:

[1] *Изв. АН УзССР Сер. Физ. -Матем. Н.* 1963, №. 2, 24～31.

Y. Eda:

[1] *Sci. Rep. Kanazawa Univ.*, **2**(1953), 23～33.

P. Erdös:

[1] *Proc. Nat. Acad. Sci.* USA, **35**(1949), 374～384.

P. Erdös, J. H. van Lint:

[1] *Proceedings A*, **85** (1982), 127～132.

Э. К. Фогелс:

[1] *Latv. PSR Zinātnu Akad.*, Физ. -Мат. Инст. Ракстп, **2**(1950), 14～45.

S. Gerig:

[1] *J. Number Theory*, **8**(1976), 131～136.

J. Hadamard:

[1] *Bull. Soc. Math. France*, **24**(1896), 199～220.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood:

[1] *Proc. London Math. Soc.* (2), **13**(1914), 174～191.

[2] *Quart. J. Math.*, 46(1915), 215～219.

[3] *Acta Math.*, 41(1917), 119～196.

G. H. Hardy, E. M. Wright:

[1] *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth edition, ELBS and Oxford, 1981.

华罗庚(L. K. Hua):

[1] *Quart. J. Math.* Oxford, **9**(1938), 97～108.

[2] «数论导引»,科学出版社,1979.

[3] «指数和的估计及其在数论中的应用»,科学出版社,1963.

华罗庚,吴方:

[1] «数学学报»,**7**(1957), 574～589.

S. Ikehara:

[1] *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.*, **10**(1931), 1～12

A. E. Ingham:

[1] *J. London Math. Soc.*, **20**(1945), 171～180.

贾朝华:

[1] «素数定理的一个推广»,数学进展(待发表).

M. Kalecki:

[1] *Acta Arith.*, **13**(1967/68), 1～7.

[2] *Prace Mat.*, **13** (1969), 51～55.

A. A. Карацуба(卡拉楚巴):

[1] 《解析数论基础》(中译本), 科学出版社, 1984.

J. Karamata:

[1] *Math. Zeit.*, **32**(1930), 319~320.

H. von Koch:

[1] *Acta Math.*, **24**(1901), 159~182.

P. Kuhn:

[1] *Math. Scand.*, **3**(1955), 75~89.

E. Landau:

[1] *Primzahlen, Second edition, Chelsea*, 1953.

[2] *Math. Ann.* **56**(1903), 645~670.

[3] *Math. Ann.* **71**(1911), 368~379.

[4] *Math. Zeit.*, **20**(1924), 105~125.

[5] *Sitz. Preuss Akad. Wiss.*, 1932, 514~521.

N. Levinson:

[1] *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **15**(1966/67), 141~146.

[2] *Amer. Math. Monthly*, **76**(1969), 225~246.

J. E. Littlewood:

[1] *Proc. London Math. Soc.* (2), **20**(1922), 22~28.

[2] *Comptes Rendus*, **158**(1914), 1864~1872.

闵嗣鹤:

[1] 《数论的方法》(上, 下), 科学出版社, 1981.

V. Nevanlinna:

[1] *Soc. Sci. Fenn. Comment Phys. Math.*, **27**(1962), No. 3, 8 pp.

[2] *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.* AI No. 343(1964), 52 pp.

潘承洞, 于秀源:

[1] 《阶的估计》, 山东科技出版社, 1983

А. Г. Постников, Н. П. Романов:

[1] *УМН*, **10**(1955), No.4 (66), 75~87.

А. Г. Постников:

[1] *УМН*, **24**(1969), No. 5(149), 263.

B. Riemann:

[1] *Ges. Math. Werke und Wiss. Nach.* 2, Aufl., 1892, 145~155.

A. Selberg:

[1] *Ann. Math.* (2), **50**(1949), 305~313.

[2] *Canad. J. Math.*, **2**(1950), 66~78.

T. Tatuzawa, K. Iseki

[1] *Proc. Japan Acad.*, **27** (1951), 340～342.

E. C. Titchmarsh (梯次玛希):

[1] *Quart. J. Math.* Oxford, **9** (1938), 97～108.

[2] *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford, 1951.

Н. Г. Чудаков:

[1] *Мат. сб.*, **1** (43) (1936), 591～602.

[2] *Мат. сб.*, **2** (44) (1937), 17～35.

[3] ДАН. СССР, **21** (1938), 425～426.

C. J. de la Vallée Poussin:

[1] *Ann. Soc. Sci. Bruxells*, **20** (1896), 183～256.

[2] *Mém. couronnés et autres mém.* Acad. Roy. Sci., Belgique, **59** (1899～1900), No. 1.

И. М. Виноградов:

[1] *ДАН СССР, сер Мат*, **22** (1958), 161～164.

A. Walfisz:

[1] *Weyl'sche Exponentialsummen in der neuere Zahlentheorie*, VEB Deutcher Verlag der Wiss., 1963.

N. Wiener:

[1] *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.* **7** (1928), 161～184.

[2] *Ann. Math.*, (2), **33** (1932), 1～100; 787.

D. V. Widder:

[1] *The Laplace Transform*, *Princeton*, 1946.

E. Wirsing:

[1] *J. Reine Angew. Math.*, **211** (1962), 205～214.

[2] *J. Reine Angew. Math.*, **214/215** (1964), 1～18.

E. M. Wright:

[1] *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, **63** (1952), 257～267.

[2] *Duke Math. J.*, **19** (1952), 695～704.